ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

Διδάσκων: Θ. Τομαράς

1. Ξεκινώντας από τους τύπους της ενέργειας και της ορμής σώματος μάζας m που κινείται στην κατεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα v, να αποδείξετε τους τύπους για την ενέργεια E' και την ορμή p'_x ως προς παρατηρητή με σχετική ταχύτητα V, επίσης στην κατεύθυνση x ως προς τον αρχικό. Να δείξετε οτι οι ποσότητες (E, cp_x) μετασχηματίζονται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz όπως ακριβώς οι (ct, x), ήτοι

$$E' = \frac{E - (V/c)cp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad cp'_x = \frac{cp_x - (V/c)E}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,. \tag{1}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (v-V)^2/c^2(1 - vV/c^2)^2}} \\ &= \frac{mc^2(1 - vV/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2 - (V^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}} = \frac{mc^2 - (V/c)cmv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ &= \frac{E - (V/c)cp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

που έχει ακριβώς την ίδια μορφή με την σχέση μετασχηματισμού του χρόνου

$$ct' = \frac{ct - (V/c)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{3}$$

Ομοίως και για τη σχέση μετασχηματισμού της p_x.

2. Ηλεκτρόνιο μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q αφήνεται από τη θέση x=0 και με αρχική ταχύτητα v=0 μέσα σε γραμμικό επιταχυντή με ομογενές και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο έντασης E με qE/m = w =σταθερά. (α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί η επιτάχυνσή του a(t). Σχολιάστε τα βασικά χαρακτηριστικά της καμπύλης που σχεδιάσατε. Πώς συμπεριφέρεται για μικρούς χρόνους και πώς για μεγάλους; (β) Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο μετασχηματισμού της επιτάχυνσης για να υπολογίσετε την επιτάχυνση του φορτίου ως προς το σύστημα ηρεμίας του. (γ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του φορτίου στη θέση x=L/2, τόσο ως προς το σύστημα ηρεμίας του, όσο και ως προς το σύστημα του εργαστηρίου.

Λύση: (α) Η εξίσωση του Νεύτωνα dp/dt=F=qE γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = w \tag{4}$$

απ' όπου

$$v(t) = \frac{wt}{\sqrt{1 + w^2t^2/c^2}}\,. \tag{5}$$

Η επιτάχυνση είναι

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{w}{(1 + w^2t^2/c^2)^{3/2}} \tag{6}$$

(β) Η επιτάχυνση ως προς το σύστημα ηρεμίας του φορτίου είναι [1]

$$a'(t) = a(t)\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{-3/2} \,, \tag{7}$$

από την οποία με αντικατάσταση των παραπάνω a(t) και v(t) προκύπτει

$$a'(t) = w = \text{constant} \tag{8}$$

(γ) Η μεταβολή στην ενέργεια του ηλεκτρονίου από την αρχική μέχρι τη θέση x=L/2 ισούται με το έργο W=FL/2=qEL/2, που πρόσφερε μέχρι τότε σε αυτό η εξωτερική δύναμη. Αφού το ηλεκτρόνιο ξεκίνησε ακίνητο, η αρχική ενέργειά του ήταν η ενέργεια ηρεμίας mc^2. Επομένως, η κινητική του ενέργεια στη θέση x=L/2 είναι K=qEL/2.

Ως προς το σύστημα ηρεμίας του το ηλεκτρόνιο έχει εξ' ορισμού ταχύτητα μηδέν. Επομένως και η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν.

3. Δύο σωμάτια με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, έχουν ενέργειες και ορμές $(E_1, \mathbf{p}_1)$ και $(E_2, \mathbf{p}_2)$. (α) Να υπολογίσετε συναρτήσει αυτών την ενέργεια του κέντρου μάζας E_{cm} του συστήματος των δύο μαζών. (β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συστήματος ΚΜ ως προς το αρχικό. (γ) Να γενικεύσετε τα παραπάνω ερωτήματα για N σώματα.

Λύση: (α) Η συνολική ενέργεια και ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων στο σύστημα του εργαστηρίου είναι $E = E_1 + E_2$ και $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, ενώ στο σύστημα Κέντρου Μάζας η συνολική ορμή είναι εξ' ορισμού μηδέν $\mathbf{P}_{cm} = 0$ και η ολική ενέργεια έστω E_{cm}. Δεδομένου οτι τα δύο συστήματα συνδέονται με μετασχηματισμό Lorentz, ισχύει

$$E_{cm}^2 - \mathbf{P}_{cm}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2\, c^2 \tag{9}$$

από την οποία

$$E_{cm} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2\, c^2}\,. \tag{10}$$

(β) Για να πάμε από το αρχικό στο σύστημα ΚΜ πρέπει να κάνουμε ένα μετασχηματισμό Lorentz, που θα κάνει τη συνολική ορμή $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \to 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να ονομάσω $x \equiv x'$ την κατεύθυνση της ολικής ορμής $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|\hat{\mathbf{x}}$, όπου $\hat{\mathbf{x}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση x. Χρησιμοποιώ τον τύπο μετασχηματισμού της ορμής όταν η σχετική ταχύτητα είναι στην κατεύθυνση x, $p' = (p - VE/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ και γράφω για την περίπτωση που με ενδιαφέρει $0 = (|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| - V(E_1 + E_2)/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Οπότε τελικά

$$V = \frac{|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| c^2}{E_1 + E_2} \tag{11}$$

ή με πλήρη διανυσματική μορφή

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) c^2}{E_1 + E_2} \tag{12}$$

(γ) Προφανώς, γενικά ισχύει

$$E_{cm} = \sqrt{(E_1 + E_2 + ... + E_N)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + ... + \mathbf{p}_N)^2 c^2} \tag{13}$$

και

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + ... + \mathbf{p}_N) c^2}{E_1 + E_2 + ... + E_N} \tag{14}$$

[1] Χρησιμοποιώ τον τύπο μετασχηματισμού της επιτάχυνσης με σχετική ταχύτητα τη στιγμή t την στιγμιαία ταχύτητα v(t) του φορτίου.

4. Ενα πιόνιο π^0 με μάζα $= 140 MeV/c^2$ και ορμή P=280 MeV/c διασπάται σε δύο φωτόνια $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, που σχηματίζουν την ίδια γωνία θ με την αρχική κατεύθυνση του πιονίου. Να υπολογίσετε (α) την ταχύτητα του πιονίου, (β) τη συχνότητα του κάθε φωτονίου και (γ) τη γωνία θ.

Λύση: (α) Η ενέργεια του πιονίου είναι $E = \sqrt{P^2c^2 + M^2c^4} = 140\sqrt{5} MeV$. Οπότε από τη σχέση $E = Mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2} = 140MeV/\sqrt{1-v^2/c^2}$ βρίσκω $1 - v^2/c^2 = 1/5$. Δηλαδή $v = 2\,c/\sqrt{5}$.

(β) Πρέπει να υπολογίσω τις ενέργειες των φωτονίων. Η διάσπαση γίνεται σε ένα επίπεδο το οποίο παίρνω να είναι το επίπεδο x-y, με τον άξονα x στην κατεύθυνση της ορμής του πιονίου. Ονομάζω E_1 και E_2 τις ενέργειες των φωτονίων και p_1 και p_2 τα μέτρα των ορμών τους. E και P είναι η ενέργεια και η ορμή του πιονίου. Διατήρηση ενέργειας και ορμής δίνουν:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E \\ (p_1 + p_2)\cos\theta &= P \\ p_2 \sin\theta &= p_2 \sin\theta \end{aligned} \tag{15}$$

με (E,P) την ενέργεια και το μέτρο της ορμής του π^0.

Η τρίτη εξίσωση δίνει $p_1 = p_2$. Οπότε, αφού τα σωμάτια 1 και 2 είναι φωτόνια (έχουν την ίδια μάζα) θα ισχύει $E_1 = E_2$. Αρα, $E_1 = E_2 = E/2 = 70\sqrt{5}MeV$ και $f_1 = f_2 = 70\sqrt{5}MeV/h = 2.36 \times 10^{22} Hz$.

(γ) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνω

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{P}{2p_1} = \frac{Pc}{2E_1} = \frac{\sqrt{E^2 - M^2c^4}}{E} = \sqrt{1 - \frac{M^2c^4}{E^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{140^2}{5 \times 140^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

5. Δύο παρατηρητές Σ1 και Σ2 με σχετική ταχύτητα V=0.5 c στην κατεύθυνση του κοινού άξονα των z έχουν ρυθμίσει τα ρολόγια τους να δείχνουν $t_1 = t_2 = 0$ τη στιγμή που συμπίπτουν οι αρχές των αξόνων τους $z_1 = z_2 = 0$. Οι Σ1 και Σ2 παρακολουθούν τη κίνηση ενός σώματος. Σύμφωνα με τον Σ1 το σώμα κατά τη χρονική στιγμή $t_1 = 1sec$ βρίσκεται στη θέση $(x_1 = 10^8 m, y_1 = 40m, z_1 = 2 \times 10^8 m)$. Τί χωροχρονικές συντεταγμένες για το γεγονός αυτό μετράει ο Σ2;

Λύση: Στους τύπους των μετασχηματισμών Lorentz αντικαθιστάτε τις συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1, t_1) που δίδονται, και υπολογίζετε τις $(x_2 = x_1, y_2 = y_1, z_2, t_2)$.

Οπότε, $z_2 = (z_1 - Vt_1)/\sqrt{1 - V^2/c^2} = (2 \times 10^8 - 0.5 \times 3 \times 10^8 \times 1)m/\sqrt{1 - 1/4} = 10^8 m/\sqrt{3}$.

Επίσης, $t_2 = \gamma(V)(t_1 - V\,z_1/c^2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1sec - 0.5 \times 2\, \times \frac{10^8 m}{3 \times 10^8 m/sec}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,sec.$

6. *Ταχυόνια και αιτιότητα*. (α) Σχεδιάστε δύο συστήματα αξόνων, που παριστούν τα συστήματα δύο παρατηρητών Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα V και των οποίων οι αρχές των αξόνων συμπίπτουν όταν t=t'=0. (β) Σχεδιάστε τον κώνο φωτός φωτεινής δέσμης που εκπέμπεται απο το σημείο (x=0, t=0). (γ) Σχεδιάστε την τροχιά υλικού σημείου που δημιουργείται στο σημείο O=(0,0), κινείται με σταθερή ταχύτητα και εξαφανίζεται στο σημείο $= (x_A, t_A)$. (δ) Θεωρείστε σωμάτιο που μπορεί να κινηθεί *με ταχύτητα μεγαλύτερη αυτής του φωτός*. Δείξτε οτι υπάρχουν αδρανειακοί παρατηρητές, ως προς τους οποίους η εξαφάνιση του σωματίου προηγείται της γέννησής του (*Παραβίαση της σχέσης αιτίου - αποτελέσματος*)