

ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7

Διδάσκων: Θεόδωρος Ν. Τομαράς

1. Βιβλίο *Serway, Moses and Moyer*: Κεφάλαιο 13, άσκηση 57 στη σελίδα 471.

Λύση: (α) Η ενέργεια Q μιας αντίδρασης ισούται, εξ' ορισμού, προς το άθροισμα των ενεργειών ηρεμίας των αντιδρώντων, μείον το άθροισμα των ενεργειών ηρεμίας των προϊόντων της αντίδρασης. Επομένως, για μια αντίδραση διάσπασης στο σύστημα ηρεμίας του αρχικού σωματίου, το Q ισούται και με τη συνολική κινητική ενέργεια των προϊόντων της διάσπασης. (β) Επίσης, λόγω διατήρησης της ορμής η ορμή p_α του σωματίου α ισούται με την ορμή p_Y του πυρήνα Y . (γ) Τέλος, χρησιμοποιώ το γεγονός ότι τα προϊόντα της αντίδρασης έχουν κινητικές ενέργειες πολύ μικρότερες των ενεργειών ηρεμίας τους, ώστε να χρησιμοποιήσω τον τύπο του Νεύτωνα $K = p^2/2m$ για την κινητική τους ενέργεια.

$$Q = K_{tot} = K_\alpha + K_Y = K_\alpha \left(1 + \frac{K_Y}{K_\alpha} \right) \simeq K_\alpha \left(1 + \frac{p_Y^2/2M_Y}{p_\alpha^2/2M_\alpha} \right) = K_\alpha \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y} \right) \quad (1)$$

2. Βιβλίο *Serway, Moses and Moyer*: Κεφάλαιο 13, άσκηση 51 στη σελίδα 470.

Λύση: (α) Η μέση κινητική ενέργεια των “ατόμων” αερίου σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι ¹

$$\bar{K} = 3k_B T/2 = 1.5 \times (k_B \times 300^\circ K) \times (T/300^\circ K) \simeq 1.5 \times (1/40)eV \times 2 \times 10^6 = 0.075 MeV \quad (2)$$

(β)

$$\begin{aligned} Q_1 &= (2M_C - M_{Ne} - M_{He})c^2 \\ &= (24u - 12m_e - 19.992439u + 10m_e - 4.002603u + 2m_e)c^2 \\ &= (24 - 19.992439 - 4.002603)uc^2 = 0.004958 \times 931.50 MeV \\ &= 4.618 MeV \end{aligned} \quad (3)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την ενέργεια της δεύτερης αντίδρασης.

(γ) Τα $12gr^{12}C$ περιέχουν N_A άτομα. Οπότε, η ολική ενέργεια που απελευθερώνεται είναι το πλήθος των ζευγών ατόμων άνθρακα στα 2000 gr επί την ενέργεια που εκλύεται από την αντίδραση του ενός ζεύγους, δηλαδή

$$\begin{aligned} E &= \frac{N_A \times 2000}{12} \times \frac{1}{2} \times 4.618 MeV \\ &\simeq 6.023 \times 10^{26} \times \frac{4.618}{12} \times 1.6 \times 10^{-13} Joules \end{aligned}$$

¹ Η σταθερά του Boltzmann είναι $k_B = 8.617 \times 10^{-5} eV/^\circ K$, ή κατά προσέγγιση $k_B \times 300^\circ K \simeq (1/40)eV$.

$$\begin{aligned}
&= 3.71 \times 10^{13} \text{ Joules} = \frac{3.71}{3.6} \times 10^{13} \times 10^{-6} \text{ kWh} \\
&= 1.03 \times 10^7 \text{ kWh}
\end{aligned} \tag{4}$$

3. Βιβλίο *Serway, Moses and Moyer*: Κεφάλαιο 13, άσκηση 63 στη σελίδα 472.

Λύση: Ονομάζω x τον υποτιθέμενο σταθερό² αριθμό των ατόμων ^{59}Fe , που πέφτουν από το εξάρτημα στο λάδι της μηχανής ανα μονάδα χρόνου. Επίσης, ονομάζω $N_{59}(t)$ το πλήθος των ατόμων ^{59}Fe στο λάδι της μηχανής τη χρονική στιγμή t . Το πλήθος αυτό σε χρόνο dt αυξάνεται κατά xdt λόγω ρίψης και νέων ρινισμάτων από το εξάρτημα, και μειώνεται κατά $\lambda N_{59}(t)dt$ λόγω ραδιενέργειας. Επομένως, ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dN_{59}}{dt} = x - \lambda N_{59} \tag{5}$$

που γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt}(\lambda N_{59} - x) = -\lambda(\lambda N_{59} - x) \tag{6}$$

και που με την προφανή αρχική συνθήκη $N_{59}(0) = 0$ δίνει

$$N_{59}(t) = \frac{x}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \tag{7}$$

από την οποία, τέλος, παίρνω

$$x = \frac{\lambda N_{59}(t)}{1 - e^{-\lambda t}} = \frac{R(t)}{1 - e^{-\lambda t}} \tag{8}$$

όπου $R(t)$ είναι η ολική ενεργότητα του λαδιού τη χρονική στιγμή t . Από αυτήν, λοιπόν, για $t = 1000h$ βρίσκω το x .

Το πρόβλημα μου ζητάει το ρυθμό αφαίρεσης μάζας dm/dt από το εξάρτημα. Ξέρω το ρυθμό απόσπασης ατόμων ^{59}Fe από το εξάρτημα. Αν $r \equiv n_{56}(t)/n_{59}(t) \simeq n_{56}(0)/n_{59}(0)$ είναι το πηλίκον του αριθμού n_{56} των ατόμων ^{56}Fe προς τα n_{59} άτομα ^{59}Fe στο εξάρτημα, τότε

$$\frac{dm}{dt} = x \left(m_{59} + \frac{n_{56}}{n_{59}} m_{56} \right) \tag{9}$$

Όμως ξέρουμε ακόμα ότι

$$n_{59}(0) = \frac{R_0}{\lambda} \tag{10}$$

με

$$m_{56}n_{56}(0) + m_{59}n_{59}(0) = n_{59}(0)(m_{56} + rm_{56}) = M \tag{11}$$

²Για μικρά χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το εξάρτημα δεν έχει υποστεί μεγάλες αλλαγές ώστε να είναι ακόμα λειτουργικό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο συνολικός αριθμός ατόμων που αποσπώνται και πέφτουν στο λάδι είναι σταθερός. Εξαρτάται μόνο από την επιφάνεια των τριβομένων επιφανειών, τις οποίες μπορούμε να υποθέσουμε σταθερές. Είναι γεγονός ότι η αναλογία n_{56} προς n_{59} αλλάζει αφού οι ^{59}Fe διασπώνται. Θα αγνοήσω αυτήν την αλλαγή στα παρακάτω.

με M την αρχική δοσμένη μάζα του εξαρτήματος.

Τελικά παίρνω

$$\frac{dm}{dt} = x \frac{M\lambda}{R_0} = \lambda M \frac{\lambda N_{59}(t)}{R_0} \frac{1}{1 - e^{-\lambda t}} = \lambda M \frac{R(t)}{R_0} \frac{1}{1 - e^{-\lambda t}} \quad (12)$$

Από όπου, αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος $M=0.2 \text{ kg}$, $R(1000h) = 6.5 \times 800/60 \text{ sec}^{-1}$, $R_0 = 20 \times 10^{-6} \times 3.7 \times 10^{10} \text{ sec}^{-1}$ και $t=1000h$, παίρνω³

$$\frac{dm}{dt} \simeq 2.75 \times 10^{-7} \text{ kg/h} \quad (13)$$

4. Βιβλίο Serway, Moses and Moyer: Κεφάλαιο 13, άσκηση 29 στη σελίδα 468.

Λύση: Για να μπορεί μια αντίδραση να συμβεί αυθόρμητα αρκεί κατ' αρχήν να είναι επιτρεπτή ενεργειακά. Η κρίσιμη ποσότητα είναι η διαφορά Q των ενεργειών ηρεμίας του αρχικού πυρήνα μείον το άθροισμα των ενεργειών ηρεμίας των προϊόντων. Όταν $Q>0$ η αντίδραση είναι επιτρεπτή ενεργειακά και επομένως μπορεί να συμβεί αυθόρμητα, ενώ όταν $Q<0$ αυτό δεν γίνεται.

(α) $Q_\alpha = (M_{nucleus Ca} - M_{nucleus K} - m_e)c^2 \simeq (M_{atom Ca} - 20m_e - M_{atom K} + 19m_e - m_e)c^2 = (39.962591 - 39.964000 - 2 \times 0.000548) \times 931.50 \text{ MeV} = -2.3334 \text{ MeV} < 0$.

Η διάσπαση αυτή ΔΕΝ μπορεί να γίνει αυθόρμητα. Πρέπει να “καταβάλουμε” απο “έξω” την ενέργεια $|Q|$ που λείπει.

(β) Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την ενέργεια $Q \simeq -1.65 \text{ MeV} < 0$ για την αντίδραση αυτή. Οπότε ούτε η αντίδραση αυτή μπορεί να γίνει αυθόρμητα.

(γ) Η αντίδραση αυτή έχει $Q \simeq +1.85 \text{ MeV} > 0$ και συνεπώς μπορεί να γίνει αυθόρμητα.

5. Βιβλίο Serway, Moses and Moyer: Κεφάλαιο 13, άσκηση 39 στη σελίδα 469.

Λύση: (α) Η ενέργεια της αντίδρασης είναι $Q \equiv (M_{nucleus He} + M_{nucleus Be} - M_{nucleus C} - M_n)c^2 = (M_{atom He} + M_{atom Be} - M_{atom C} - M_n)c^2 = (4.002603 + 9.012183 - 12.000000 - 1.008665)uc^2 = 27.524 \text{ MeV}$

Οι μάζες των ηλεκτρονίων απαλείφονται στα δύο μέλη της αντίδρασης. Έχουμε 6 ηλεκτρόνια στο αριστερό μέλος και 6 στο δεξί.

(β) $Q \equiv (2M_{nucleus D} - M_{nucleus He} - M_n)c^2 = (2M_{atom D} - M_{atom He} - M_n)c^2 = 2 \times 2.014102 - 3.016029 - 1.008665)uc^2 = +3.27 \text{ MeV}$.

Η αντίδραση αποδίδει ενέργεια ($Q>0$) και επομένως είναι εξώθερμη.

6. Βιβλίο Serway, Moses and Moyer: Κεφάλαιο 14, άσκηση 44 στη σελίδα 512.

³Η απάντηση αυτή είναι περίπου 6.2 φορές μεγαλύτερη από αυτήν που δίνει το βιβλίο. Αν δεν έχω κάνει κάποιο λάθος, υποθέτω ότι στο βιβλίο ξεχάσανε να πολλαπλασιάσουνε επί τα 6.5 λίτρα λαδιού.

Λύση: (α) Απαιτείται υψηλή θερμοκρασία για να υπερνικηθεί η ηλεκτροστατική άπωση των δύο πυρήνων που συντήκονται. Αφού το φορτίο του πυρήνα άνθρακα είναι 6-πλάσιο του πρωτονίου, η απωστική δυναμική ενέργεια C-p είναι 6-πλάσια της p-p, οπότε χρειαζόμαστε και κινητική ενέργεια στους πυρήνες άνθρακα και υδρογόνου. Δεδομένου ότι η μέση κινητική ενέργεια σχετίζεται με τη θερμοκρασία με τη σχέση $\bar{K} = 3k_B T/2$, απαιτείται 6-πλάσια θερμοκρασία αυτής του κύκλου υδρογόνου, δηλαδή $C = 6 \times T_H = 9.0 \times 10^7 K$.

(β) Η ενέργεια Q κάθε αντίδρασης υπολογίζεται όπως και σε προηγούμενες ασκήσεις. Προσέξτε ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων στα δύο μέλη όλων των αντιδράσεων του κύκλου είναι ο ίδιος. Οπότε, μπορείτε να βάζετε κατ' ευθείαν τις μάζες των ατόμων αντί για τις μάζες των πυρήνων, που δεν υπάρχουν στους πίνακες του βιβλίου. Επίσης, η μάζα του φωτονίου είναι μηδέν και του νετρίνου σχεδόν μηδέν και δεν συνεισφέρουν στο Q των αντιδράσεων.

(γ) Τα νετρίνα, όπως έχουμε πει, έχουν πολύ μικρή ενεργό διατομή με την ύλη και επομένως αντιδρούν ελάχιστα με αυτήν. Διατρύπουν εύκολα τον αστέρα και φεύγουν χωρίς να αλληλεπιδράσουν μαζί του και επομένως χωρίς να εναποθέσουν καθόλου ενέργεια σε αυτόν.

7. Βιβλίο *Serway, Moses and Moyer*: Κεφάλαιο 14, άσκηση 24 στη σελίδα 511.

Λύση: 1 ράντ ακτινοβολίας προσδίδει σε 1 kg του ακτινοβολούμενου υλικού ενέργεια 0.01 J. Επομένως, τα 25 ράντ σε 75 kg μάζας προσδίδουν ενέργεια $E = 25 \times 75 \times 0.01 J = 18.75 J$.