Η ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΜΕΓΑΛΗΣ ΕΚΚΡΗΞΗΣ

Διδάσκων: **Θεόδωρος Ν. Τομαράς**

1 Η Θεωρία της Μεγάλης Εκκρηξης

Σύμφωνα με τη Θεωρία της Μεγάλης Εκκρηξης (Hot Big Bang) το παρατηρούμενο Σύμπαν ξεκίνησε από μία κατάσταση αμελητέου μεγέθους, "άπειρης" πυκνότητας και "άπειρης" θερμοκρασίας. Ολο το παρατηρούμενο Σύμπαν ήταν κάποτε στο παρελθόν συγκεντρωμένο σε μιά απειροστά μικρή περιοχή του χώρου, σε συνθήκες εξαιρετικά υψηλής πυκνότητας και θερμοκρασίας.

Εκτοτε διαστέλλεται, αραιώνει και ψύχεται.

Πάντα τα συστατικά του ήταν κατ' αρχήν ένας συνδυασμός από μη-σχετικιστικά σωματίδια και ακτινοβολία.

Τα συστατικά του Σύμπαντος κάθε στιγμή βρίσκονται κατ' αρχήν σε συνεχή αλληλεπίδραση, που οδηγεί σε διάφορες αντιδράσεις ανάμεσά τους. Για παράδειγμα αν σε κάποια περίοδο ανάμεσα στα συστατικά του Σύμπαντος υπήρχαν $p, \bar{p}, n, \bar{n}, e, e^+, \nu, \bar{\nu}, \gamma$ σε αρκετά υψηλή θερμοκρασία, διάφορες αντιδράσεις όπως οι

$$p + \bar{p} \leftrightarrow e + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma \tag{1}$$

$$e + p \leftrightarrow e + p\ ,\quad n \rightarrow p + e + \bar{\nu}\ ,\quad e + p \leftrightarrow n + \nu\ ,\ \ ... \tag{2}$$

λάμβαναν χώρα μεταξύ τους.

Για να μπορεί κανείς να μιλάει για ωρισμένη θερμοκρασία T όταν αναφέρεται στο Σύμπαν, θα πρέπει να είναι βέβαιος ότι το Σύμπαν ήταν σε θερμική ισορροπία. Οταν οι συνθήκες θερμοκρασίας, πυκνοτήτων και ρυθμού διαστολής του σύμπαντος, ήταν τέτοιες ώστε οι αντιδράσεις αυτές να γίνονται και προς τις δύο κατευθύνσεις, τότε τα παραπάνω στοιχεία ήταν σε θερμική ισορροπία και σε συγκεντρώσεις που καθορίζονται από τη συνθήκη ισορροπίας.

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να βρίσκεται ένα σωμάτιο σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του, είναι να είχε αντιδράσει αρκετές φορές με τα υπόλοιπα σωμάτια, ώστε να έρθει σε ισορροπία. Αρα θα πρέπει ο μέσος χρόνος ανάμεσα σε δύο συγκρούσεις του σωματίου αυτού να είναι πολύ μικρότερος από την ηλικία $t \sim 1/H$ του σύμπαντος. Ο ρυθμός της αντίδρασης Γ (αριθμός αντιδράσεων ανά μονάδα χρόνου) ενός σωματιδίου με τα υπόλοιπα στο σύμπαν είναι ανάλογος της ενεργού διατομής σ της αντίδρασης, ανάλογος της αριθμητικής πυκνότητας n των σωματιδίων του στόχου και τέλος ανάλογος της σχετικής του ταχύτητας v με τα σωμάτια του στόχου. Ητοι, [1]

$$\Gamma \sim \langle \sigma n v \rangle\ . \tag{3}$$

Προφανώς χρειάζεται η μέση τιμή πάνω στις σχετικές ταχύτητες των σωματιδίων του στόχου.

[1] Γνωρίζετε από το μάθημα της Σύγχρονης Φυσικής ΙΙ, πως όταν μία δέσμη N_0 σωματιδίων με ταχύτητα v πέσει σε ακίνητο στόχο, το πλήθος $N(x)$ των σωματιδίων που βρίσκονται ακόμα στη δέσμη (δεν έχουν σκεδαστεί) σε βάθος x μέσα στο στόχο, είναι $N(x) = N_0 \exp(-n\sigma x)$, όπου σ η ενεργός διατομή της σκέδασης των σωματιδίων της δέσμης με αυτά του στόχου, n η πυκνότητα των σωματιδίων στο στόχο. Οπότε, ο αριθμός των κρούσεων ανά μονάδα χρόνου και ανά σωμάτιο της δέσμης είναι: $\Gamma = -(1/N)(dN/dt) = -(1/N)(dN/dx)(dx/dt) = n\sigma v$. Εάν, οι σκεδαστές δεν μπορούν έστω και κατά προσέγγιση να θεωρηθούν ακίνητοι, τότε χρειάζεται να λάβει κανείς υπ' όψιν του την κατανομή $f(v)$ των σχετικών ταχυτήτων των δέσμης-σκεδαστών και να υπολογίσει τη μέση τιμή $\langle n\sigma v\rangle = \int dvn\sigma v f(v)$ με αυτή τη κατανομή. Για ομογενή στόχο η πυκνότητα n δεν εξαρτάται από την ταχύτητα v και μπορεί να βγεί από το ολοκλήρωμα. Ομως η ενεργός διατομή γενικά εξαρτάται από την σχετική ταχύτητα. Ωστόσο, μπορεί κανείς πολλές φορές να εκτιμήσει την $\langle n\sigma v\rangle$ γράφοντάς την ίση προς $\Gamma \sim n\overline{\sigma}\,\overline{v}$, όπου $\overline{v}$ η χαρακτηριστική μέση ταχύτητα όπως προκύπτει από την $f(v)$ και $\overline{\sigma} = \sigma(\overline{v})$.

Επομένως, η συνθήκη για να είναι το σωματίδιο σε ισορροπία με το περιβάλλον είναι

$$H \leq \Gamma \sim \langle \sigma n v \rangle \ . \tag{4}$$

Να σημειωθεί εδώ ότι όλα τα μεγέθη στην παραπάνω σχέση εξαρτώνται από το χρόνο. Επομένως, δεν αποτελεί έκπληξη το οτι σωμάτια μπορεί να είναι σε ισορροπία με το υπόλοιπο σύμπαν κάποια χρονική περίοδο και να παύουν να είναι κάποιαν άλλη.

1.1 Η θερμοκρασία του Σύμπαντος

1.1.1 Φωτόνια

Εστω οτι το Σύμπαν αποτελείται μόνο από φωτόνια θερμοκρασίας T. Σύμφωνα με τη θεωρία του μέλανος σώματος, ο αριθμός των φωτονίων ανά μονάδα όγκου και με ενέργεια στο διάστημα $(E, E+dE)$ είναι

$$dn = \frac{8\pi}{h^3c^3}\,\frac{E^2 dE}{e^{E/k_BT}-1} \tag{5}$$

Ολοκληρώνοντας στην ενέργεια υπολογίζει κανείς την συνολική πυκνότητά τους

$$n_\gamma = \frac{2.404}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3 \tag{6}$$

ή από το ολοκλήρωμα $\int E dn$ την πυκνότητα ενέργειας των φωτονίων θερμοκρασίας T να δίνεται από το γνωστό τύπο Stefan-Boltzmann

$$u_\gamma = \rho_\gamma c^2 = a_{SB}\,T^4 \tag{7}$$

με τη σταθερά Stefan-Boltzmann

$$a_{SB} \equiv \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7.5659\times 10^{-16} J/m^3/K^4\,. \tag{8}$$

Η μέση ενέργεια $\overline{E}_\gamma$ του φωτονίου στο αέριο είναι

$$\overline{E}_\gamma \equiv \frac{u_\gamma}{n_\gamma} = 2.7 k_BT \tag{9}$$

1.1.2 Ακτινοβολία γενικά

Κάθε περίοδος της ζωής του Σύμπαντος χαρακτηρίζεται από την αντίστοιχη θερμοκρασία T και από τα είδη των σωματιδίων (φωτόνια, e, e^+, p, n, H, D, ...), που αποτελούν το περιεχόμενό του. Η μέση κινητική ενέργεια των σωματιδίων σε θερμοκρασία T είναι $\overline{E}_{\text{kin}} \sim k_BT$. Ολα τα είδη σωματιδίων για τα οποία στη δεδομένη περίοδο ισχύει $\overline{E}_{\text{kin}} \sim k_BT \gg mc^2$, και των οποίων εύλογα μπορεί κανείς να αγνοήσει τη μάζα, υπακούουν σε τύπους παραπλήσιους αυτών που ισχύουν για τα φωτόνια, και επομένως χαρακτηρίζονται συνολικά ως "ακτινοβολία" με τα διάφορα είδη σωματιδίων να αποτελούν τις διάφορες συνιστώσες της.

Για παράδειγμα, όταν το Σύμπαν είχε θερμοκρασία με $k_BT \sim 1GeV$ τα ηλεκτρόνια και τα ποζιτρόνια που υπήρχαν σε αυτό ήταν μέρος της ακτινοβολίας, αφού η ενέργεια ηρεμίας τους $m_ec^2 \simeq 0.511MeV \ll 1GeV \sim \overline{E}$.

Οι τύποι που ισχύουν για τις διάφορες συνιστώσες της ακτινοβολίας διαφέρουν μόνο λόγω του διαφορετικού σπιν των αντίστοιχων σωματιδίων και είναι οι εξής:

Η διαφορική αριθμητική πυκνότητα ενός είδους ακτινοβολίας είναι

$$dn = \frac{4\pi g}{h^3c^3}\,\frac{E^2\,dE}{e^{E/k_BT}\pm 1} \tag{10}$$

με το $-$ να αναφέρεται σε μποζόνια και το $+$ σε φερμιόνια, και το g να συμβολίζει τις καταστάσεις σπιν του σωματιδίου ($g(\gamma) = 2, g(\nu) = 1, g(e) = 2$).

Οι αντίστοιχες αριθμητικές πυκνότητες είναι

$$n_b = \frac{4}{3} n_f = \frac{2.404\, g}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \tag{11}$$

και η συνολική πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$u_R \equiv \rho_R c^2 = \frac{g^*}{2} a_{SB} T^4 \tag{12}$$

με

$$g^* \equiv \sum_i (g_b)_i + \frac{7}{8} \sum_i (g_f)_i \tag{13}$$

τον "ενεργό αριθμό καταστάσεων σπιν" που απαρτίζει την ακτινοβολία.

Για παράδειγμα, η συνεισφορά των ηλεκτρονίων, ποζιτρονίων και των φωτονίων στην ενεργειακή πυκνότητα του Σύμπαντος, όταν ήταν σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία $k_B T \sim 1GeV$, ήταν $u_R = (11/4) a_{SB} T^4$, αφού $g^* = g_\gamma + 7(g_e + g_{e^+})/8 = 2 + 7/2 = 11/2$.

• *Σχόλιο*: Ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος εξαρτάται μέσω του g^* από τον αριθμό των διαφορετικών ειδών σωματιδίων (φερμιονίων και μποζονίων) που υπάρχουν στη Φύση και που θα είναι παρόντα γενικώς σε διάφορες φάσεις της εξέλιξής του.

1.1.3 Η σχέση T, a και t για την ακτινοβολία

• Στο νεαρό Σύμπαν κυριαρχούσε η ακτινοβολία. Η διατήρηση της ενέργειας κατά την διαστολή του Σύμπαντος έδωσε τη σχέση $\rho_R \sim a^{-4}$. Αν κατά τη διαστολή αυτή έχουμε και θερμική ισορροπία τότε ισχύει και η (12). Ο συνδυασμός τους οδηγεί στην

$$T \sim a^{-1} \tag{14}$$

κάτι που προκύπτει και από το γεγονός οτι, όπως είδαμε σε άλλο σημείο, τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας υφίστανται κοσμική ερυθρόπηση, δηλαδή $\lambda \sim a$ και επομένως η ακτινοβολία ψύχεται σύμφωνα με την (14).

• Σύμφωνα με την εξίσωση Friedmann, κατά τη διάρκεια της κυριαρχίας της ακτινοβολίας στο νεαρό Σύμπαν ίσχυε $a(t) \sim t^{1/2}$. Από αυτή προκύπτει οτι $\rho_R c^2 = 3c^2/(32\pi G_N t^2)$, η οποία σε συνδυασμό με την (12) δίνει [2]

$$t(sec) \simeq \frac{10^{20}}{[T(K)]^2} \tag{15}$$

1.2 Οι βασικοί σταθμοί στην ιστορία του Σύμπαντος

1.2.1 Αποδέσμευση των νετρίνων - Εξαφάνιση των ποζιτρονίων

Ας αρχίσουμε την περιγραφή της εξέλιξης του Σύμπαντος από την περίοδο που η θερμοκρασία του ήταν $k_B T \simeq 1\, GeV$, που με βάση την (15) αντιστοιχεί σε χρόνο $t \simeq 10^{-8} sec$, αφού μέχρι τότε στο Σύμπαν κυριαρχούσε η ακτινοβολία.

Η μέση ενέργεια των συστατικών του Σύμπαντος εκείνη την εποχή ήταν περί το $1\, GeV$. Σκεδαζόμενα με τέτοιες ενέργειες τα συστατικά του Σύμπαντος δημιουργούσαν τις συνθήκες θερμικής ισορροπίας ανάμεσα σε p, n, e, ν, γ και τα αντισωμάτιά τους. Παράγονταν και μερικά άλλα, όπως $\Delta, \Xi, \Sigma, \rho, \phi, ...$, αλλά όντας ασταθή με χρόνους ζωής της τάξης $10^{-23} sec$ σχεδόν αμέσως

[2] ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε τη σχέση αυτή. Ποιά ήταν η ηλικία του νεαρού Σύμπαντος όταν η θερμοκρασία του ήταν τέτοια ώστε $k_B T = 10\, GeV$;

εξαφανίζονταν. Αρα, την εποχή εκείνη στο Σύμπαν υπήρχαν κατά βάσιν p, n, e, ν, γ και τα αντισωμάτιά τους. Ενδεχομένως και μερικά π, K, που είναι και αυτά ασταθή και δεν θα παραμείνουν για πολύ.

• Ας παρακολουθήσουμε τα νετρίνα. Τα νετρίνα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με τα υπόλοιπα, μέσω των αντιδράσεων

$$\nu + n \leftrightarrow e + p\ , \quad \bar{\nu} + p \leftrightarrow e^+ + n\ , \tag{16}$$

που σε αυτές τις συνθήκες συμβαίνουν εξ' ίσου γρήγορα και προς τις δύο κατευθύνσεις. Οι αντιδράσεις αυτές κρατάνε και τα πρωτόνια και τα νετρόνια σε θερμική ισορροπία αλλάζοντας τα μεν στα δε.

Το Σύμπαν όμως ψύχεται και οι ενέργειες των σωματιδίων μειώνονται. Οι ενεργοί διατομές σ μειώνονται γρήγορα και οι ταχύτητες Γ των αντιδράσεων γίνονται μικρότερες από τη σταθερά Hubble. Τα νετρίνα και τα αντινετρίνα παύουν ουσιαστικά να αλληλεπιδρούν με την υπόλοιπη ύλη.

Οταν η θερμοκρασία έπεσε στη $k_B T_\nu \simeq 3MeV$ ($t \sim 10^{-1} sec$) είχαμε δύο σημαντικές αλλαγές: (α) Τα νετρίνα και τα αντινετρίνα αποδεσμεύτηκαν από την υπόλοιπη ύλη και από τότε αραιώνουν σαν ελεύθερη ακτινοβολία, και (β) το πηλίκον n_p/n_n πάγωσε στη τιμή που είχε εκείνη τη στιγμή.

Τί απέγιναν τα νετρίνα; Υπάρχουν γύρω μας. Μας περιβάλλει ένα αέριο νετρίνων με κατανομή μέλανος σώματος θερμοκρασίας $T_{\nu,0} \sim 1.9^o K$ και με πυκνότητα $n_{\nu,0} \sim 150/cm^3$. Δεν είναι εύκολο να τα ανιχνεύσουμε και αν τα νετρίνα έχουν μη μηδενική μάζα, αποτελούν μέρος της σκοτεινής ύλης.

• Ας δούμε τί έγινε με τα ποζιτρόνια. Αυτά είναι ακόμα σε θερμική ισορροπία με τα ηλεκτρόνια και τα φωτόνια μέσω των αμφιδρόμων αντιδράσεων

$$e + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma \tag{17}$$

Τα φωτόνια με θερμοκρασίες μερικών MeV μπορούν και παράγουν ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια ($m_e = 0.511 MeV/c^2$) και τα κρατάνε σε ισορροπία με τα υπόλοιπα. Αυτό έπαψε να συμβαίνει όταν η θερμοκρασία έπεσε σε $k_B T < 1MeV$. Δεδομένου οτι εκείνη τη στιγμή υπήρχαν περισσότερα ηλεκτρόνια από ποζιτρόνια, και επίσης οτι οι παραπάνω αντιδράσεις μπορούσαν να γίνονται μόνο από αριστερά προς τα δεξιά, τα ποζιτρόνια αντέδρασαν με ηλεκτρόνια και εξαφανίστηκαν σε φωτόνια.

1.2.2 Η πυρηνοσύνθεση

• *Παρατήρηση*: Η ύλη στο Σύμπαν σήμερα είναι κυρίως Η και ένα σημαντικό ποσοστό ^4He. Το ποσοστό μάζας ^4He ορίζεται

$$y \equiv \left(\frac{^4He}{H + {}^4He} \right)_{mass} \tag{18}$$

και σήμερα είναι $y_0 \simeq 0.24$.

• *Βασική υπόθεση*: Εκτός από το ^4He και μερικά άλλα ελαφρά στοιχεία έχουν κοσμική προέλευση, ενώ τα βαρύτερα στοιχεία που βλέπουμε γύρω μας παρασκευάστηκαν στο εσωτερικό αστέρων. Με αυτή την υπόθεση μπορούμε να εξηγήσουμε σωστά τις σχετικές περιεκτικότητες του Σύμπαντος σε ελαφρά στοιχεία, όπως το ^4He.

• *Οι ελαφροί πυρήνες*. Ας συνεχίσουμε την περιγραφή της ιστορίας του Σύμπαντος. Μέχρι θερμοκρασίες της τάξης του MeV είχαμε τα πρωτόνια και τα νετρόνια σε θερμική ισορροπία λόγω των αντιδράσεων (16). Ταυτόχρονα υπήρχαν και αντιδράσεις όπως η

$$p + n \leftrightarrow D^+ + \gamma \tag{19}$$

δημιουργίας και διάσπασης δευτερίου. Καθώς το Σύμπαν ψύχεται κι άλλο τα φωτόνια παύουν να έχουν αρκετή ενέργεια για να διασπάσουν το δευτέριο, το οποίο αρχίζει να συσσωρεύεται.

Αυτό είχε σαν συνέπεια να μπορούν να γίνονται και αντιδράσεις όπως οι

$$\begin{aligned} D^+ + n \leftrightarrow^3 H^+ + \gamma \quad &, \quad D^+ + p \leftrightarrow^3 He^{++} + \gamma \\ {}^3H^+ + p \leftrightarrow^4 He^{++} + \gamma \quad &, \quad {}^3He^{++} + n \leftrightarrow^4 He^{++} + \gamma \end{aligned} \tag{20}$$

παραγωγής πυρήνων τριτίου και ηλίου.

Το γεγονός οτι (α) δεν υπάρχουν ευσταθείς πυρήνες με $A = 5$, (β) οτι η παραγωγή πυρήνων με $A = 6$ ή $A = 7$ μέσω των αντιδράσεων

$${}^4He + D \leftrightarrow^6 Li + \gamma \;, \quad {}^4He + {}^3H \leftrightarrow^7 Li + \gamma \tag{21}$$

είναι μικρή διότι απαιτεί μεγαλύτερη από τη διαθέσιμη πυκνότητα δευτερίου, και (γ) οτι δεν υπάρχουν ευσταθείς πυρήνες με $A = 8$ (${}^8Be \rightarrow^4 He +^4 He$), σταμάτησε εδώ την κοσμική παραγωγή πυρήνων.

• *Η θερμοκρασία της πυρηνοσύνθεσης.* Η θερμοκρασία κάτω από την οποία τα φωτόνια δεν μπορούσαν να διασπάσουν με σημαντική απόδοση τους ελαφρούς αυτούς πυρήνες ήταν

$$k_B T_{bbn} \simeq 0.7 MeV \tag{22}$$

$$T_{bbn} \simeq 10^9 \, {}^oK \;, \quad t_{bbn} \simeq 10^2 sec \tag{23}$$

• *Η πρόβλεψη για το y_0 και για το $\Omega_{B,0}$.* Το συνολικό αποτέλεσμα των (19) και (20) είναι

$$2n + 2p \rightarrow^4 He^{++} + \gamma \tag{24}$$

Δεδομένου οτι η ύλη που παρατηρούμε σήμερα είναι κύρια H, είναι λογικό να συμπεράνουμε οτι τα νετρόνια γίνανε όλα ${}^4He$ και επομένως $n_{He} = n_n/2$. Επίσης, το H που παρατηρούμε είναι τα πρωτόνια που περισσέψανε και δεν βρήκανε νετρόνια για να γίνουν ήλιο. Οπότε $n_H = n_p - n_n$. Αρα,

$$y = \frac{n_{He}\, m_{He}}{n_H\, m_H + n_{He}\, m_{He}} \simeq \frac{(n_n/2)\, 4m_N}{(n_p - n_n)m_N + (n_n/2)\, 4m_N} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \tag{25}$$

όπου

$$\lambda \equiv \frac{n_n}{n_p}\,. \tag{26}$$

Βρισκόμαστε σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία κλάσμα του MeV. Τα πρωτόνια και τα νετρόνια είναι μή σχετικιστικά και οι πυκνότητές τους είναι ανάλογες του παράγοντα $Boltzmann$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το ότι $\epsilon \simeq mc^2$ και οτι $m_n - m_p \simeq 1.3MeV$ παίρνουμε

$$\lambda = \frac{e^{-\epsilon_n/k_B T_{bbn}}}{e^{-\epsilon_p/k_B T_{bbn}}} \simeq e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{k_B T_{bbn}}} \simeq e^{-1.3/0.7} \simeq \frac{1}{6.4} \tag{27}$$

Αν πάρουμε υπ' όψιν και το οτι τα νετρόνια είναι ασταθή και κάποια απο αυτά διασπάστηκαν στο μεταξύ, σύμφωνα με την $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$, καταλήγουμε στο ότι

$$\lambda \simeq \frac{1}{7} \tag{28}$$

και συνεπώς

$$y \simeq \frac{2/7}{8/7} = \frac{1}{4} \;!!!!! \tag{29}$$

• *Η σπουδαιότητα των ελαφρών στοιχείων.* Οι αντιδράσεις δεν έχουν απόδοση 100% και έτσι εξηγείται το οτι έχουμε και μικρές ποσότητες από δευτέριο, τρίτιο και λίθιο.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί εδώ οτι οι ποσότητες των διαφόρων στοιχείων και ιδιαίτερα του δευτερίου είναι πολύ ευαίσθητες στο ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος. Αν το Σύμπαν διασταλεί πολύ γρήγορα, τότε μένει λίγος χρόνος για να μαγειρευτούν οι πυρήνες, και αντιστρόφως.

Ο ρυθμός διαστολής εξαρτάται, ανάμεσα σε άλλα και από τον αριθμό των οικογενειών σωματιδίων (π.χ. αριθμό ειδών νετρίνων, λεπτονίων, κ.τ.λ.) διότι αυτό επηρρεάζει τον παράγοντα g^*. Επίσης, παρά το ότι είμαστε ακόμα σε περίοδο "φωτοκρατίας" με μικρό ποσοστό μή σχετικιστικής βαρυονικής ύλης, εξαρτάται και από το μικρό αυτό ποσοστό.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, συμπεραίνει αφ' ενός οτι δεν μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από τρείς οικογένειες σωματιδίων και αφ' ετέρου οτι η βαρυονική πυκνότητα μάζας είναι της τάξης

$$\Omega_B \simeq 0.044 \tag{30}$$

1.2.3 Το Κοσμικό Υπόβαθρο Μικροκυμάτων (CMB)

• **Η θερμοκρασία $\mathbf{T_{\gamma,0}}$**

Οταν η θερμοκρασία στο Σύμπαν έπεσε αρκετά, ώστε οι αντίδραση

$$e + p \leftrightarrow H + \gamma \tag{31}$$

να μην μπορεί να γίνει από δεξιά προς τα αριστερά, τότε τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια σχημάτισαν ουδέτερα άτομα H, και τίποτε δεν μπορούσε πιά να σταματήσει τα φωτόνια από το να ταξιδεύουν ελεύθερα στο Σύμπαν.

Ο λεπτομερής υπολογισμός του πότε συνέβη η αποδέσμευση των φωτονίων, δηλαδή του πότε τα φωτόνια είχαν αρκετή ενέργεια για να διασπάνε τα H, σε συνδυασμό με το να προλαβαίνουν την εκτόνωση του Σύμπαντος, οδηγεί στις σχέσεις

$$k_B T_\gamma \simeq 0.26 eV \ , \quad T_\gamma \simeq 3000\,^o K \ , \quad z_\gamma \simeq 1100 \tag{32}$$

Για να υπολογίσω πότε έγινε αυτό, μπορώ να χρησιμοποιήσω τα ποσοστά σκοτεινής ενέργειας, ύλης και ακτινοβολίας που αποτελούν το Σύμπαν σήμερα και να πάω πίσω στο χρόνο, μέχρι να φτάσω στη παραπάνω θερμοκρασία. Ο χρόνος που συνέβη η αποδέσμευση των φωτονίων είναι

$$t_\gamma \simeq 10^{13}\, sec \simeq 350,000\, years \tag{33}$$

Από εκείνη τη περίοδο και μετά τα φωτόνια είναι ελεύθερα. Συνεχίζουν να ακολουθούν την κατανομή Planck. Τα μήκη κύματός τους ακολουθούν όπως έχουμε πει τη κοσμική διαστολή και η θερμοκρασία τους σήμερα προβλέπεται να είναι

$$T_{\gamma,0} = T_\gamma \, \frac{a(t_\gamma)}{a_0} = \frac{T_\gamma}{1 + z_\gamma} \simeq 2.7\,^o K \tag{34}$$

με τυπικό μήκος κύματος που μας δίνει ο νόμος του Wien να είναι

$$\lambda_{max} \sim \mathcal{O}(mm) \tag{35}$$

δηλαδή στη περιοχή των μικροκυμάτων.

Η τιμή της θερμοκρασίας του υποβάθρου που μέτρησαν πρόσφατα με ακρίβεια με τον COBE (Cosmic Background Explorer satelite) είναι

$$T_{\gamma,0} = 2.725 \pm 0.002\,^o K \tag{36}$$

Η αριθμητική πυκνότητα των φωτονίων (που υπολογίζεται από τον σχετικό τύπο της θεωρίας του μέλανος σώματος) και το πηλίκον βαρυονίων Ω_B (που βρήκαμε παραπάνω) προς φωτόνια είναι

$$n_{\gamma,0} \simeq 411/cm^3 \ , \quad \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 10^{-10} - 10^{-9} \tag{37}$$

αντίστοιχα.

• Η θερμοκρασία $\mathbf{T_{RM}}$

Σε ποιά θερμοκρασία είχαμε το πέρασμα από φωτοκρατία σε υλοκρατία; Η συνολική ακτινοβολία που έχουμε σήμερα αποτελείται από φωτόνια και νετρίνα. Θα δούμε αμέσως μετά οτι σήμερα $\rho_\nu \simeq 0.68\,\rho_\gamma$. Οπότε,

$$\frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_{R,0}} = \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_{B,0}}\,\frac{\Omega_{B,0}}{1.68\times\Omega_{\gamma,0}} \simeq \frac{0.3}{0.04}\,\frac{n_B m_N c^2}{1.68\times n_\gamma \times 2.7\times k_B\,T_{\gamma,0}} \simeq 1.1\times 10^4 \tag{38}$$

Στη θερμοκρασία T_{RM} θα ισχύει εξ' ορισμού

$$1 = \frac{\rho_R}{\rho_M} = \frac{\rho_{R,0}}{\rho_{M,0}}\,\frac{1}{a(t_{RM})} = \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}}(1+z_{RM}) \simeq \frac{1+z_{RM}}{1.1\times 10^4}\,, \tag{39}$$

ήτοι

$$z_{RM} \simeq 10\,z_\gamma\,. \tag{40}$$

Επομένως, το Σύμπαν τη στιγμή της ισότητας ακτινοβολίας και ύλης ήταν 10 φορές μικρότερο από ότι την αποδέσμευση των φωτονίων, και επομένως

$$k_B\,T_{RM} \simeq 10 k_B T_\gamma \simeq \mathcal{O}(10eV)\,. \tag{41}$$

Επίσης, αφού τη περίοδο $t_{RM} < t < t_\gamma$ το Σύμπαν ήταν υλοκρατούμενο, ίσχυε οτι $a(t) \sim t^{2/3}$ και επομένως

$$\frac{t_{RM}}{t_\gamma} \simeq \left(\frac{a_{RM}}{a_\gamma}\right)^{3/2} \simeq \left(\frac{z_\gamma}{z_{RM}}\right)^{3/2} \simeq (1/10)^{3/2} \simeq 0.03\,, \tag{42}$$

οπότε

$$t_{RM} \simeq 10,000\,years \tag{43}$$

ΣΧΟΛΙΟ: Αν όλα αυτά που λέμε μέχρι εδώ είναι σωστά, τότε υπάρχει σοβαρό πρόβλημα με την ηλικία του Σύμπαντος.

Αφού μόνο 10,000 από τα 10 δισεκατομμύρια χρόνια συνολικά το Σύμπαν ήτανε φωτοκρατούμενο, μπορούμε να κάνουμε μιά χοντρική εκτίμηση της ηλικίας του με βάση τη σχέση που θα ίσχυε αν ήταν υλοκρατούμενο από την αρχή $t = 0$. Ετσι βγάζουμε οτι

$$t_{0(k=0)} \simeq t_{0(k=0)}^{MDU} \simeq \frac{2}{3}\,t_H \simeq 9\,Gyr\,, \tag{44}$$

που αντίκειται σε άλλες πολύ μεγαλύτερες εκτιμήσεις της ηλικίας του.

ΛΥΣΗ: Θα δούμε παρακάτω οτι η παραδοχή επίπεδου Σύμπαντος ($k = 0$) επαληθεύεται παρατηρησιακά. Ομως υπάρχει και άλλο συστατικό του (η σκοτεινή ενέργεια), που δεν λάβαμε μέχρι τώρα υπ' όψιν, η παρουσία του οποίου αλλάζει την παραπάνω πρόβλεψη για την ηλικία του Σύμπαντος και την κάνει συμβιβαστή με τις παρατηρήσεις.

• Η θερμοκρασία των νετρίνων $\mathbf{T_{\nu,0}}$

Οταν η θερμοκρασία ήτανε $k_B T_\nu \simeq 3\,MeV$ αποσυνδέθηκαν τα νετρίνα και τα αντινετρίνα, όντας ακριβώς πριν σε ισορροπία με τα πρωτόνια, τα νετρόνια, τα ηλεκτρόνια, τα ποζιτρόνια και τα φωτόνια. Αργότερα, όταν η θερμοκρασία έπεσε στους $k_B\,T_\gamma \simeq 0.26eV$ περίπου, υπερίσχυσε η διαδικασία σχηματισμού έναντι της διάσπασης υδρογόνων με αποτέλεσμα την αποσύνδεση των φωτονίων. Δεδομένου οτι ακτινοβολία, είτε αλληλεπιδρά είτε όχι, αλλάζει θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση $T \sim a^{-1}$, θα έπρεπε σήμερα να έχουμε $T_{\nu,0} = T_{\gamma,0}$. Ομως, όπως είπαμε παραπάνω, αυτό δεν είναι αλήθεια. Η θερμοκρασία των νετρίνων σήμερα είναι $1.9^o K$ ενώ των φωτονίων $2.72^o K$. Γιατί;

Ο λόγος είναι οτι σε κάποια ενδιάμεση στιγμή συνέβη κάτι που ανέβασε τη θερμοκρασία των φωτονίων χωρίς να αλλάξει αυτήν των νετρίνων. Και αυτό το κάτι είναι η εξαφάνιση των ποζιτρονίων σύμφωνα με την αντίδραση

$$e + e^{+} \to \gamma + \gamma \,, \tag{45}$$

που δημιούργησε φωτόνια που ζέσταναν και αυτά που ήδη υπήρχαν.

Αυτό συνέβη όταν η θερμοκρασία ήτανε περί τους $k_B T \sim 1MeV$. Πριν από αυτό, σε έναν όγκο V υπήρχαν φωτόνια, ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια σε θερμοκρασία T, ενώ αμέσως μετά ο όγκος έγινε V' και είχε μόνο φωτόνια θερμοκρασίας T'. Κατά τη διαδικασία αυτή ισχύει οτι $TdS = dE + pdV = 0$, δηλαδή η εντροπία διατηρείται. Επίσης, για ακτινοβολία ισχύει

$$S = \frac{2g^*}{3} a_{SB}\, V\, T^3 \,. \tag{46}$$

Εξισώνοντας την εντροπία πριν και μετά παίρνω $S_\gamma + S_e + S_{e^+} = S'_\gamma$, ήτοι

$$\left(2 + \frac{7}{8}(2+2)\right) V T_\gamma^3 = 2 V' {T'}_\gamma^3 \tag{47}$$

Τα νετρίνα δεν συμμετείχαν στη παραπάνω διαδικασία. Είχαν αποσυνδεθεί από τα υπόλοιπα σωματίδια και ελεύθερα άλλαξαν από όγκο V σε V' και από θερμοκρασία T_ν σε T'_ν. Η εντροπία τους δεν άλλαξε και επομένως ισχύει για τα νετρίνα οτι [3]

$$V T_\nu^3 = V' {T'}_\nu^3 \tag{48}$$

και, επίσης, πριν την εξαφάνιση των ποζιτρονίων όπως είπαμε παραπάνω ίσχυε $T_\gamma = T_\nu$. Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνω

$${T'}_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} {T'}_\gamma \tag{49}$$

και από αυτήν

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} = \frac{g_\nu^*}{g_\gamma} \left(\frac{{T'}_\nu}{{T'}_\gamma}\right)^4 = \frac{21/4}{2} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \simeq 0.68 \,, \tag{50}$$

όπου χρησιμοποίησα οτι για 3 είδη νετρίνων και αντινετρίνων έχω $g_\nu^* = (7/8)(3\times(1+1)) = 21/4$.

Στη συνέχεια και μέχρι σήμερα τόσο η θερμοκρασία των νετρίνων όσο και η θερμοκρασία των φωτονίων απλά ακολούθησε τη διαστολή του Σύμπαντος, με αποτέλεσμα να έχουμε σήμερα

$$T_{\nu,0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\gamma,0} \simeq 1.9^o K \tag{51}$$

[3] Ενας άλλος τρόπος να αποδείξει κανείς τη σχέση $T \sim 1/a$ ανάμεσα στη θερμοκρασία των ελεύθερων φωτονίων και του παράγοντα κλίμακας του σύμπαντος είναι κάνοντας χρήση της διατήρησης της εντροπίας του εκτονούμενου φωτονικού αερίου.