ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

Διδάσκων: Θ. Τομαράς

Δίδονται: Μάζα πρωτονίου $M_p \simeq 1GeV/c^2$, μάζα ηλεκτρονίου $m_e \simeq 0.5MeV/c^2$. Για $x << 1$ ισχύει ο προσεγγιστικός τύπος $(1-x)^{1/2} \simeq 1 - x/2$.
$1TeV = 10^3 GeV = 10^9 keV = 10^{12} eV$. $1MeV \simeq 1.6 \times 10^{-13} J$.

1. Ο επιταχυντής Large Hadron Collider (LHC) του CERN επιταχύνει σήμερα πρωτόνια, σε τελική ενέργεια E=4 TeV. Να υπολογισθούν (α) η κινητική ενέργεια των πρωτονίων, (β) η ορμή τους και (γ) η ταχύτητά τους με ακρίβεια 8ου δεκαδικού ψηφίου.

Λύση: (α) $K = E - m_p c^2 = 4000GeV - 1GeV = 3999GeV$
(β) $p = \sqrt{E^2 - m^2 c^4}/c = \frac{E}{c}\sqrt{1 - (mc^2/E)^2} = \frac{E}{c}\sqrt{1 - 1/(4 \times 10^3)^2} \simeq \frac{E}{c} = 4TeV/c$.
(γ) Ισχύει $E = m_p\, c^2\, \gamma(v)$. Από αυτήν προκύπτει $\gamma = E/m_p c^2 = 4 \times 10^3$. Οπότε $v^2/c^2 = 1 - 4000^{-2}$. Αρα $v/c = \sqrt{1 - 4000^{-2}} \simeq 1 - 0.312 \times 10^{-7} \simeq 0.99999997$.

2. Πρωτόνιο των Κοσμικών Ακτίνων έχει ενέργεια E=10 GeV. Ζητούνται (α) η κινητική του ενέργεια K, (β) η ταχύτητά του με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου, (γ) η ορμή του. (δ) Τί ταχύτητα για το πρωτόνιο αυτό προβλέπει ο τύπος της κινητικής ενέργειας του Νεύτωνα;

Λύση: (α) $K = E - mc^2 = 9GeV$.
(β) $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = E/mc^2 = 10$. Οπότε $v/c = \sqrt{1 - 10^{-2}} \simeq 1 - 0.5 \times 10^{-2} \simeq 0.995$.
(γ) $p = Ev/c^2 \simeq 0.995 \times E/c \simeq 9.95GeV/c$.
(δ) $K = 9GeV = (1/2)mv_N^2 = (1/2)mc^2(v_N/c)^2 = (1/2) \times 1\,GeV(v_N/c)^2$. Δηλαδή $v_N/c = 3\sqrt{2} \gg 1$!!!!

3. Ραδιενεργός πυρήνας σε κάποιο εργαστήριο εκπέμπει φωτόνιο με ενέργεια E=10 MeV. Να υπολογίσετε (α) την ορμή του φωτονίου, (β) την συχνότητά του και (γ) την ταχύτητα του φωτονίου ως προς παρατηρητή κινούμενο με ταχύτητα V ως προς το εργαστήριο.

Λύση: (α) p=E/c=10 MeV/c.
(β) $h\nu = E = 10MeV$. Οπότε $\nu = 10\,MeV/h = 10 \times 1.6 \times 10^{-13} J/(6.63 \times 10^{-34} Jsec) \simeq 2.41 \times 10^{21} Hz$.
(γ) v=c.

4. *Μέτρηση της μάζας του νετρίνου*. Από έκκρηξη supernova σε απόσταση L από τη Γη παράχθηκαν φωτόνια και νετρίνα με την ίδια ενέργεια E. Τα νετρίνα έφτασαν στη Γη χρόνο T μετά τα φωτόνια. Να υπολογιστεί η μάζα m του νετρίνου, συναρτήσει των L, E, T και της ταχύτητας του φωτός c. Εφαρμογή: $L = 2 \times 10^6 lyrs$, E=1MeV, T=1min.

Λύση: Από τον τύπο της ενέργειας $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ παίρνουμε για την ταχύτητα v του νετρίνου $v/c \equiv \beta = \sqrt{1 - m^2c^4/E^2}$. Οπότε, ο χρόνος που κάνει το νετρίνο να διανύσει απόσταση L είναι $t_\nu = L/v = L/c\beta$. Ο αντίστοιχος χρόνος t_γ για το φωτόνιο είναι $t_\gamma = L/c$. Η διαφορά $T = t_\nu - t_\gamma = (L/c)\Big(1/\sqrt{1 - m^2c^4/E^2} - 1\Big)$. Λύνω ως προς τη μάζα του νετρίνου και παίρνω $m = (E/c^2)\sqrt{1 - 1/(1 + cT/L)^2}$.

Εφαρμογή: $cT/L = 60sec \times c/2 \times 10^6 \times \pi \times 10^7 \times c \simeq 10^{-12} \ll 1$. Οπότε $mc^2 = E\sqrt{1-(1+cT/L)^{-2}} \simeq \sqrt{2}\,E\sqrt{cT/L} \simeq 1.4eV$.

5. Πυρηνικός αντιδραστήρας καταναλώνει 0.01 mole ραδιενεργού υλικού X, οι πυρήνες του οποίου διασπώνται σύμφωνα με την αντίδραση $X \rightarrow Y + A$, για να θερμάνει το νερό που περιέχει, μάζας $= 10^4 kg$. Δίδονται οι μάζες $m_X = 230.422 GeV/c^2$, $m_Y = 226.410 GeV/c^2$ και $m_A = 4.010 GeV/c^2$, αντίστοιχα, καθώς επίσης η ειδική θερμότητα $C = 4.19 kJ/kgr\,^oC$ του νερού. Υπολογίστε (α) την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού του αντιδραστήρα και (β) πόση ποσότητα πετρέλαιο εκτιμάτε ότι θα χρειαζόμασταν για να επιτύχομε το ίδιο αποτέλεσμα.

Λύση: (α) Η ενέργεια που εκλύεται από τη διάσπαση ενός πυρήνα X είναι $\Delta mc^2 \equiv (m_X - m_Y - m_A)c^2 = 0.002 GeV = 2 MeV$. Εξισώνω την ενέργεια που προσφέρεται στο νερό από τη διάσπαση όλων των διαθέσιμων πυρήνων, με αυτήν που χρειάζεται για να αλλάξει η θερμοκρασία του κατά $\Delta\theta$ και παίρνω $E = 10^{-2} N_A \Delta mc^2 = MC\Delta\theta$. Οπότε, $\Delta\theta = 10^{-2} N_A \Delta mc^2/MC = 10^{-2} \times 6 \times 10^{23} \times 2MeV/(10^7 gr \times 4.18 J/gr/^o C) = (6 \times 2 \times 1.6 \times 10\,^oC)/4.18 = 45.9\,^oC$.

(β) Για να έχω το ίδιο αποτέλεσμα στη θερμοκρασία του νερού κάνοντας χρήση πετρελαίου πρέπει να κάψουμε μάζα πετρελαίου M' τόση ώστε να ισχύει $KM' = E = 10^{-2} \times 6 \times 10^{23} \times 2 \times 1.6 \times 10^{-13} J = 1.92 \times 10^9 J$, όπου K είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας, που εκλύεται κατά την καύση του πετρελαίου. Οπότε, $M' = 1.92 \times 10^9 J/K$.

Βρείτε μόνοι σας από πίνακες μια λογική τιμή του K, που χρειάζεται για τον παραπάνω υπολογισμό.

6. Ασκηση 15 του $Serway$, σελίδα 34.

Παίρνω τα A και B να πλησιάζουν τη Γη από τον αρνητικό άξονα των x. Τότε $v_A = 0.5c$ και $v_B = 0.8c$. Η ταχύτητα v' με την οποία βλέπει ο B να κινείται ο A είναι

$$v' = \frac{v_A - v_B}{1 - v_A v_B/c^2} = \frac{0.5c - 0.8c}{1 - 0.4} = -0.5c \tag{1}$$

7. Ασκηση 31, του $Serway$, σελίδα 35.

(α) Αν $L_x = L_0 \cos\theta_0$ και L_y είναι τα μήκη των προβολών της ράβδου στους άξονες x και y κατά τον παρατηρητή στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου, ο παρατηρητής ως προς τον οποίο η ράβδος κινείται μετράει $L'_x = L_x\sqrt{1 - v^2/c^2}$ και $L'_y = L_y$, αντίστοιχα. Επομένως, το μήκος που μετράει αυτός είναι

$$L = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y} = \sqrt{L^2_x(1 - v^2/c^2) + L^2_y} = \sqrt{L^2_0 - L^2_x v^2/c^2} = L_0\sqrt{1 - v^2\cos^2\theta_0/c^2} \tag{2}$$

(β)

$$\tan\theta = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{L_y}{L_x\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\tan\theta_0 \tag{3}$$