

ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ - ΣΥΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Θ. Τομαράς

1. Να υπολογισθούν οι παρακάτω παραστάσεις με την ακρίβεια που αναφέρεται: (α) 0.99^2 με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου. (β) 0.999999^4 με ακρίβεια έκτου δεκαδικού ψηφίου. (γ) $\sqrt{1 - 0.001^2}$ με ακρίβεια έβδομου δεκαδικού ψηφίου.

Λύση: (α) $0.99^2 = (1 - 0.01)^2 \simeq 1 - 2 \times 0.01 = 0.98$
 (β) $0.999999^4 = (1 - 0.000001)^4 \simeq 1 - 4 \times 0.000001 = 0.999996$
 (γ) $\sqrt{1 - 0.001^2} \simeq 1 - 0.5 \times 0.001^2 = 1 - 5 \times 10^{-7} = 1 - 0.0000005 = 0.9999995$

2. Δέσμη με $N_0 = 10^{20}$ μόνια κινείται με ταχύτητα $0.999999c$. (α) Πόσα μόνια εκτιμάτε ότι θα έχουν απομείνει στη δέσμη μετά από $t = 10^{-2} \text{sec}$; (β) Τί απόσταση θα έχουν διανύσει μέχρι εκείνη τη στιγμή;

Ο χρόνος ζωής του μιονίου είναι $\tau_\mu \simeq 2 \times 10^{-6} \text{sec}$.

Λύση: (α) $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 10^3/\sqrt{2}$.
 $N = N_0 e^{-t/\gamma\tau} = 10^{20} e^{-\sqrt{2} \times 10^{-2}/(10^3 \times 2 \times 10^{-6})} \simeq 10^{16.9}$
 (β) $l = 0.999999c \times 10^{-2} \text{sec} = 0.999999 \times 3 \times 10^8 \text{m} \times 10^{-2} = 2.999997 \times 10^6 \text{m}$.

3. Δοχείο όγκου V_0 (στο σύστημα ηρεμίας του) και ακανόνιστου σχήματος κινείται με ταχύτητα v ως προς τον παρατηρητή Σ . (α) Ποιός είναι ο όγκος V που μετράει ο Σ ; (β) Αν n_0 είναι η πυκνότητα σωματιδίων του αερίου μέσα στο δοχείο στο σύστημα ηρεμίας του, τί πυκνότητα n μετράει ο Σ ;

Λύση: (α) Χωρίστε τον όγκο σε απειροστά μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με απειροστά μικρές βάσεις κάθετες στη διεύθυνση κίνησης. Ο όγκος καθενός από αυτά μικραίνει κατά τον παράγοντα $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ λόγω της "συστολής" της πλευράς της παράλληλης προς την κατεύθυνση της κίνησης. Οπότε και ο συνολικός όγκος γίνεται $V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(β) $n = N/V = N/(V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}) = n_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma(v)n_0$

4. Ταξιδιώτης σε διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα $v=0.9999999999c$ προς μακρινό γαλαξία, που απέχει από τη Γη $L = 2 \times 10^6$ έτη φωτός. (α) Πόση απόσταση αντιλαμβάνεται ο ταξιδιώτης ότι έχει να διανύσει μέχρι να φτάσει στο γαλαξία αυτόν; (β) Πόσο χρόνο υπολογίζει ότι θα χρειαστεί αν διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του; (γ) Πόσο χρόνο θα διαρκέσει το ταξίδι κατά τον γήινο παρατηρητή;

Λύση: (α) $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 - (1 - 10^{-10})^2} \simeq \sqrt{2 \times 10^{-10}} = \sqrt{2} \times 10^{-5}$. Οπότε, $L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 2 \times 10^6 \sqrt{2} \times 10^{-5} \text{ly} = 20\sqrt{2} \text{ly}$.

(β) Ο χρόνος που ξέρει ότι θα χρειαστεί είναι $T = L'/v \simeq L'/c = 20\sqrt{2} \text{years}$.

(γ) Ο παρατηρητής στη Γη βλέπει τον ταξιδιώτη να κινείται με ταχύτητα v , οπότε για να διανύσει την απόσταση L θα χρειαστεί χρόνο $T' = L/v = 2 \times 10^6 \text{cyears}/0.9999999999c =$

$$2 \times 10^6 \text{ years} / (1 - 10^{-10}) \simeq 2 \times 10^6 \text{ years} \times (1 + 10^{-10}) \simeq 2 \times 10^6 \text{ years} + 2 \times 10^{-4} \times 365 \times 24 \text{ h} \simeq 2 \times 10^6 \text{ years} + 1.752 \text{ h}.$$

5. Το Ρέθυμνο απέχει από το Ηράκλειο 75 km. Φανταστείτε ότι η ταχύτητα του φωτός ήτανε 150 km/h. Πόση ώρα θα κάνατε να φτάσετε με το αυτοκίνητό σας στο Ρέθυμνο, αν ταξιδεύατε με σταθερή ταχύτητα 75 km/h;

Λύση: Η απόσταση που θα είχατε να διανύσετε θα ήτανε όχι 75 km αλλά $D = 75 \text{ km} \sqrt{1 - v^2/c^2} = 75 \text{ km} \sqrt{3}/2$. Οπότε θα χρειαζόσασταν χρόνο $T = L/v = 75 \text{ km} \sqrt{3} / (2 \times 75 \text{ km/h}) = \sqrt{3} \text{ h} / 2 \simeq 0.866 \text{ h} \simeq 52 \text{ min}$.