ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ PP1

Διδάσκων: Θεόδωρος Ν. Τομαράς

1. Η θεωρία των μαγνητικών μονοπόλων προβλέπει οτι αυτά αντιδρούν με πρωτόνια και δίνουν

$$M + p \to M + e^+ + \pi^0 \tag{1}$$

με ενεργό διατομή $\sigma \simeq 0.01$ barn. Το παραγόμενο πιόνιο διασπάται σε δύο φωτόνια, ενώ το ποζιτρόνιο αντιδρά με κάποιο ηλεκτρόνιο της ύλης και δίνει επίσης δύο φωτόνια σχεδόν ταυτόχρονα με τα άλλα. Οπότε, από κάθε αντίδραση του μονοπόλου προκύπτουν τέσσερα φωτόνια. Επίσης, τα μονόπολα έχουν πολύ μεγάλη μάζα ($m \sim 10^{16} GeV/c^2$), με συνέπεια να επηρρεάζονται ελάχιστα από τις κρούσεις με τους πυρήνες και να κινούνται σε ευθεία γραμμή.

Ενα τέτοιο μονόπολο πέφτει με ταχύτητα $v \sim 10^{-5} c$ στην επιφάνεια μιας λίμνης. Θα δούμε φωτόνια να εκπέμπονται ανά διαστήματα. (α) Εκτιμείστε την μέση απόσταση ανάμεσα σε δύο τέτοια γεγονότα. (β) Κάθε πόση ώρα θα συμβαίνει ένα τέτοιο γεγονός;

Λύση: (α) Η μέση απόσταση ανάμεσα σε δύο αντιδράσεις είναι η *μέση ελεύθερη διαδρομή* του μονοπόλου $l = 1/n_{proton}\sigma$ στο νερό. Η πυκνότητα πρωτονίων στο νερό υπολογίζεται από το γεγονός οτι 18 γραμμάρια νερού, που είναι $18 cm^3$, περιέχουν N_A μόρια, και επομένως $10 N_A$ πρωτόνια. Αρα,

$$n_{proton} = \frac{10 N_A}{18 cm^3} \tag{2}$$

$$l = \frac{1}{n\sigma} \simeq \frac{18\, cm^3}{10 \times 6 \times 10^{23} \times 10^{-2} \times 10^{-24} cm^2} \simeq 3\, m \tag{3}$$

(β) Η χρονική απόσταση δύο τέτοιων γεγονότων θα είναι

$$\Delta t = l/v \simeq \frac{3m}{10^{-5} \times 3 \times 10^8 m/sec} \simeq 1 msec \tag{4}$$

2. Θεωρητικός φυσικός ισχυρίζεται οτι τα πρωτόνια δεν είναι ευσταθή, αλλά διασπώνται με μέσο χρόνο ζωής $\tau = 1/\lambda = 10^{33}$ έτη. (α) Πόσα πρωτόνια πρέπει να παρακολουθούμε ώστε βάσιμα να ελπίζουμε να δούμε περί τα 10 να διασπαστούν σε ένα χρόνο; (β) Σε πόσο όγκο νερού υπάρχουν τόσα πρωτόνια;

Λύση: (α) Μετά από χρόνο t έχουν μείνει

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \tag{5}$$

πρωτόνια. Για $t = 1\, year$ έχουμε

$$e^{-t/\tau} = e^{-10^{-33}} \simeq 1 - 10^{-33} \tag{6}$$

Σε ένα χρόνο θέλουμε να έχουν διασπαστεί περί τα 10 πρωτόνια. Δηλαδή

$$\Delta N = N_0 - N(t = 1\, year) = N_0 \times 10^{-33} = 10 \tag{7}$$

Αυτό δίνει

$$N_0 \simeq 10^{34} \tag{8}$$

πρωτόνια, που πρέπει να παρακολουθούμε.

(β) Τα $18\,cm^3$ περιέχουν N_A μόρια νερού, δηλαδή $10N_A$ πρωτόνια. Επομένως, τα 10^{34} πρωτόνια θα υπάρχουν σε νερό όγκου

$$V = \frac{18\,cm^3 \times 10^{34}}{10 \times 6 \times 10^{23}} = 3 \times 10^4\,m^3 \tag{9}$$

3. Περιγράψτε ένα πείραμα, ανάλογο αυτού της Wu που έγινε μετά από υπόδειξη των $T.D.\,Lee$ και $C.N.\,Yang$, αλλά βασισμένο στην αντίδραση $n \to pe\bar{\nu}$, που να δείχνει οτι η ασθενής αλληλεπίδραση, που είναι υπεύθυνη για την αντίδραση αυτή παραβιάζει την $parity$ (ομοτιμία).

Λύση: Κάνω το ίδιο ακριβώς πείραμα με εκείνο, μόνο που αντί να χρησιμοποιώ πολωμένο κοβάλτιο, χρησιμοποιώ πολωμένα νετρόνια και παρατηρώ πώς κατανέμονται τα ηλεκτρόνια που παράγονται σε σχέση με την κατεύθυνση της πόλωσης των νετρονίων. Αν εκπέμπονται ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις, τότε ΔΕΝ έχω παραβίαση της ομοτιμίας. Αντίθετα, αν εκπέμπονται κατά προτίμηση στην κατεύθυνση της πόλωσης του νετρονίου, ή αντίθετα προς αυτήν, τότε έχω παραβίαση της ομοτιμίας. Η εξήγηση είναι ΑΚΡΙΒΩΣ η ίδια με αυτή που περιέγραψα στο μάθημα.

4. Φορτισμένο πιόνιο π^+ διασπάται εν πτήσει σε μιόνιο και νετρίνο $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Το μιόνιο εκπέμπεται σε γωνία 30^0 σχετικά με την αρχική κατεύθυνση του πιονίου. Να υπολογιστεί η ορμή (μέτρο, διεύθυνση και φορά) και η ενέργεια του νετρίνου.

Δίδονται: ενέργεια πιονίου $E = 1\,GeV$, μάζα πιονίου $m_\pi \simeq 140\,MeV$, μάζα μιονίου $m_\mu \simeq 110\,MeV$, μάζα νετρίνου $m_\nu \simeq 0$.

Λύση: Απλή εφαρμογή των νόμων διατήρησης ενέργειας και ορμής με τους σχετικιστικούς τύπους. Εχουμε λύσει αντίστοιχες ασκήσεις σε προηγούμενες σειρές ασκήσεων.

5. Οι ασταθείς πυρήνες A (λ_A) και B (λ_B) συμμετέχουν στις εξής δύο αντιδράσεις

$$A \to B + C\,, \quad B \to D + F \tag{10}$$

(α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις για τους αριθμούς $N_A(t)$ και $N_B(t)$ των πυρήνων A και B σε κάθε χρονική στιγμή.

(β) Υποθέστε οτι αρχικά είχαμε N_0 πυρήνες A και τίποτε άλλο. Λύστε την εξίσωση για το $N_A(t)$.

(γ) Αντικαταστείστε αυτό που βρήκατε στην άλλη εξίσωση, που έτσι θα έχει μόνη άγνωστη συνάρτηση την $N_B(t)$. Λύστε την και βρείτε το $N_B(t)$.

(Λύση: $N_B(t) = \Big((N_0\lambda_A)/(\lambda_B - \lambda_A)\Big)(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$.)

Υπόδειξη: Αν δεν έχετε σημειώσεις από το μάθημα, μπορείτε να βρείτε βοήθεια είτε σε εμένα είτε σε βιβλία πυρηνικής φυσικής όπως του $Kaplan$ ή του $Enge$ στη βιβλιοθήκη.

Λύση: (α) Οι πυρήνες A ικανοποιούν την

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \tag{11}$$

και οι B την

$$\frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A \tag{12}$$

(β) Λύνοντας την πρώτη εξίσωση με τη δοσμένη αρχική συνθήκη βρίσκω, ως γνωστόν

$$N_A(t) = N_0\, e^{-\lambda_A t} \tag{13}$$

(γ) Αντικαθιστώ στη δεύτερη εξίσωση και παίρνω για τον πληθυσμό των πυρήνων B την γραμμική μή ομογενή εξίσωση

$$\frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_0\, e^{-\lambda_A t} \tag{14}$$

Εφαρμόζω τη γνωστή μέθοδο λύσης τέτοιων εξισώσεων και βρίσκω τη λύση

$$N_B(t) = \frac{N_0 \lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right) \tag{15}$$

για τους πυρήνες B.

6. Να εξηγήσετε αναλυτικά γιατί το σωμάτιο Ω^- μπορεί να διασπαστεί μόνο με χρήση της ασθενούς δύναμης. Τί τάξης μεγέθους θα είναι επομένως ο μέσος χρόνος ζωής του?

Λύση: Η λεπτομερής εξήγηση δόθηκε στο μάθημα.

7. Ποιές από τις παρακάτω αντιδράσεις στον LHC (συγκρούσεις πρωτονίων με πρωτόνια) είναι δυνατόν (Δ) να γίνουν και ποιές αδύνατον (Α) και γιατί; (Θεωρείστε οτι οι τρεις λεπτονικοί αριθμοί διατηρούνται και οι τρείς χωριστά)

$$\begin{aligned}
&(i)\; p + p \to \pi^+ + \pi^- \;,\;\; (ii)\; p + p \to \Lambda^0 + \Delta^{++} \;,\;\; (iii)\; p + p \to \pi^+ + \mu^+ \;, \\
&(iv)\; p + p \to n + n + e^+ + e^+ \;,\;\; (v)\; p + p \to \Delta^+ + \Delta^- + \pi^+ + \pi^+ \;, \\
&(vi)\; p + p \to \Delta^{++} + \nu_e + \bar{\nu}_e
\end{aligned} \tag{16}$$

Λύση: $(i)\mathbf{A} : Q, B$, $(ii)\;\mathbf{\Delta}$, $(iii)\mathbf{A} : J, B, L_\mu$, $(iv)\mathbf{A} : L_e$, $(v)\;\mathbf{\Delta}$, $(vi)\mathbf{A} : J, B$.

8. Να γράψετε μία αντίδραση που μπορεί να γίνει στον LHC και μία που δεν μπορεί. Εξηγείστε λεπτομερώς.

9. Τα σωμάτια A, B, C, D, E, F, G συμμετέχουν στην παρακάτω αλυσίδα διασπάσεων με τα τελικά F, G να είναι ευσταθή.

$$A \to B + C\,,\;\; C \to D + E\,,\;\; E \to F + G \tag{17}$$

Να γράψετε τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι πληθυσμοί των A, C, E, F.

Λύση: Το διάστημα $(t, t + dt)$ ο πληθυσμός των πυρήνων A αλλάζει λόγω διασπάσεων κατά $dN_A(t) = -\lambda_A N_A(t)dt$. Αντίστοιχα ο πληθυσμός των C αλλάζει κατά $dN_C^{(1)}(t) = +\lambda_A N_A(t)dt$ λόγω της μετατροπής των A σε C και επίσης κατά $dN_C^{(2)}(t) = -\lambda_C N_C(t)dt$ λόγω της διάσπασής τους σε $D + E$. Ομοίως για τους E, F. Οπότε οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_A}{dt} &= -\lambda_A N_A \\
\frac{dN_C}{dt} &= +\lambda_A N_A - \lambda_C N_C \\
\frac{dN_E}{dt} &= +\lambda_C N_C - \lambda_E N_E \\
\frac{dN_F}{dt} &= +\lambda_E N_E
\end{aligned} \tag{18}$$

10. Να μελετήσετε αν η αντίδραση

$$\gamma + p \to n + e^+ + \nu_e \tag{19}$$

είναι επιτρεπτή ή απαγορευμένη. Αν ισχύει το δεύτερο να καταγράψετε όλους τους νόμους διατήρησης (και μόνο αυτούς) που την απαγορεύουν. Να θεωρήσετε ότι δεν υπάρχει περιορισμός στην αρχική ενέργεια.

Λύση: Η αντίδραση είναι επιτρεπτή ασθενής. Είναι η βασική αντίδραση ραδιενέργειας β^+. Η παρουσία του φωτονίου στο αριστερό μέλος μπορεί να εξασφαλίσει τη διατήρηση ενέργειας και ορμής.

11. Το αυτό για την αντίδραση

$$\bar{\nu}_e + e \to \bar{p} + n + \nu_e\,. \tag{20}$$

Λύση: Η αντίδραση αυτή είναι απαγορευμένη. Παραβιάζει τους νόμους διατήρησης: J, B, L.

12. Να προσδιορίσετε ποιό σωμάτιο λείπει από την αντίδραση

$$\gamma + e \to n + \nu_e + ... \tag{21}$$

Λύση: Οπως προκύπτει από τους απόλυτους νόμους διατήρησης (E, P, J, Q, B, L), το σωμάτιο που λείπει από την αντίδραση πρέπει να έχει B=-1 και Q=-1. Το πιό γνωστό υποψήφιο είναι επομένως το αντιπρωτόνιο. Ωστόσο θα μπορούσε να είναι και το αντι-Δ^+. Ακόμα θα μπορούσε να είναι και σωμάτιο με μη μηδενική παραδοξότητα, αφου αυτή δεν είναι υποχρεωτικό να διατηρείται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

13. Υποθέσετε οτι δεν ισχύει ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου Q. Να εξηγήσετε γιατί τότε το ηλεκτρόνιο θα μπορούσε να διασπαστεί γράφοντας μιά δυνατή αντίδραση διασπασής του.

Λύση: Η αντίδραση, π.χ.

$$e \to \nu_e + \gamma \tag{22}$$

δεν παραβιάζει κανέναν άλλο νόμο διατήρησης, πλην αυτού του ηλεκτρικού φορτίου. Θα ήταν μια δυνατή αντίδραση διάσπασης του ηλεκτρονίου.

14. Κατά τη σύγκρουση ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου στο σύστημα Κέντρου Μάζας τους με συνολική ενέργεια E, παράγεται και ένα φωτόνιο σύμφωνα με την αντίδραση

$$e + e^+ \to e + e^+ + \gamma\,, \tag{23}$$

το οποίο εκπέμπεται κάθετα προς την κατεύθυνση κίνησης των αρχικών σωματίων. Τα δε τελικά e και e^+ έχουν ίσες κατά μέτρο ορμές, που σχηματίζουν γωνία 120 μοιρών με τη κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου.

Να υπολογίσετε την ορμή και την ενέργεια του φωτονίου. Να διερευνήσετε για ποιές τιμές της αρχικής ενέργειας E είναι δυνατή η παραπάνω κατανομή των ορμών των σωματιδίων της τελικής κατάστασης.

Λύση: Ονομάζω p την ορμή του φωτονίου. Από το νόμο διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο θα έχουν το καθένα επίσης ορμή p. Οπότε, δεδομένου ότι η ενέργεια του φωτονίου είναι pc και του ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου, ο νόμος διατήρησης της ενέργειας δίνει

$$pc + 2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = E\,. \tag{24}$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$3p^2c^2 + 2Ecp + 4m^2c^4 - E^2 = 0\,. \tag{25}$$

Η λύση της για την ενέργεια του φωτονίου είναι (η αρνητική λύση απορρίπτεται ως αφύσικη)

$$pc = \frac{1}{3}\left(-E + \sqrt{4(E^2 - 3m^2c^4}\right)\,. \tag{26}$$

Η ολική ενέργεια E του συστήματος είναι μεγαλύτερη από $2mc^2$, και επομένως η υπόριζη ποσότητα είναι πάντα θετική. Συνεπώς, είναι πάντα δυνατή η δεδομένη κατανομή των ορμών των τελικών σωματιδίων.