ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6

Διδάσκων: Θεόδωρος Ν. Τομαράς

1. Υπολογίστε την ενεργότητα ποσότητας $1gr$ ραδιενεργού ^{14}C, το οποίο έχει χρόνο ημιζωής $T_{1/2} = 5760$ έτη.

Λύση:

$$R = \lambda N = \frac{0.693}{T_{1/2}} N = \frac{0.693}{T_{1/2}} \frac{M}{m_{atom}} \tag{1}$$

$$m_{atom} \simeq 14u \simeq 14 \times 1.66 \times 10^{-27} kg \simeq 2.324 \times 10^{-26} kg \tag{2}$$

$$R \simeq \frac{0.693}{5760 \times \pi \times 10^7 sec} \frac{10^{-3} kg}{2.324 \times 10^{-26} kg} \simeq 1.65 \times 10^{11} Bq \simeq 4.46 Ci \tag{3}$$

2. Πόσοι περίπου από τους πυρήνες σε ένα γραμμάριο καθαρού ραδιενεργού ^{40}K με χρόνο ημιζωής $T_{1/2} = 1.28 \times 10^9$ έτη θα έχουν διασπαστεί σε ένα εκατομμύριο έτη;

Λύση: Οι πυρήνες που είναι ακόμα αδιάσπαστοι τη χρονική στιγμή t είναι

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} = N_0 e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}} \tag{4}$$

οπότε, αυτοί που έχουν διασπαστεί μέχρι τη στιγμή t είναι

$$\Delta N(t) = N_0 - N(t) = N_0 \Big(1 - e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}}\Big) \tag{5}$$

Για $t = 10^6$ έτη, έχουμε

$$\frac{0.693t}{T_{1/2}} \simeq \frac{0.693 \times 10^6 \text{years}}{1.28 \times 10^9 \text{years}} \simeq 0.45 \times 10^{-3} \ll 1 \tag{6}$$

οπότε, μπορώ να χρησιμοποιήσω την προσέγγιση

$$e^{-\frac{0.693t}{T_{1/2}}} \simeq 1 - \frac{0.693t}{T_{1/2}} \tag{7}$$

και να πάρω

$$\Delta N(t = 1month) = N_0 - N(t = 1month) = N_0 \frac{0.693t}{T_{1/2}} = N_0 \times 0.45 \times 10^{-3} \tag{8}$$

Για να βρώ τους αρχικούς πυρήνες N_0 διαιρώ τη δοσμένη μάζα του υλικού δια της μάζας ενός ατόμου,

$$N_0 = \frac{M}{m_{atom}} \simeq \frac{1gr}{40 \times 1.66 \times 10^{-24} gr} \simeq 0.66 \times 10^{22} \tag{9}$$

και παίρνω τελικά για τον αριθμό των διασπάσεων σε $10^6 years$

$$\Delta N(t = 10^6 years) = 0.66 \times 10^{22} \times 0.45 \times 10^{-3} \simeq 0.3 \times 10^{19} \tag{10}$$

3. Μέρος από τα οστά κάποιου προϊστορικού ανθρώπου περιέχουν 10 γραμμάρια άνθρακα. Η ενεργότητα του δείγματος αυτού σήμερα είναι 1 Bq. Πρίν πόσα περίπου χρόνια απεβίωσε ο άνθρωπος αυτός;

Λύση: Τα 10 γραμμάρια άνθρακα περιέχουν

$$N(C) = \frac{M}{m_{atom}} \simeq \frac{10gr}{12 \times 1.66 \times 10^{-24} gr} \simeq 0.5 \times 10^{24} \tag{11}$$

άτομα άνθρακα. Από αυτά περί τα

$$N_0(^{14}C) \simeq 1.3 \times 10^{-12} N(C) \simeq 0.65 \times 10^{12} \tag{12}$$

ήταν αρχικά ραδιενεργοί άνθρακες ^{14}C. Η αρχική ενεργότητα του δείγματος ήταν

$$R_0 = \lambda N_0 = \frac{0.693}{T_{1/2}} N_0 \simeq \frac{0.693 \times 0.65 \times 10^{12}}{5760 \times 365 \times 24 \times 3600 \; sec} \simeq 2.5 Bq \tag{13}$$

Οπότε, από τον τύπο

$$R(t) = R_0 e^{-\lambda t} \tag{14}$$

της ενεργότητας, παίρνω

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_0}{R} \simeq \frac{T_{1/2}}{0.693} \ln \frac{2.5}{1} \simeq \frac{5760 years}{0.693} \times 0.9163 \simeq 7616 \; years \tag{15}$$

4. Δίδεται οτι η πιθανότητα να διασπαστεί ένα ασταθές σωμάτιο (πυρήνας ή άλλο) στο χρονικό διάστημα $(t, t + \Delta t)$ είναι για αρκετά μικρά χρονικά διαστήματα Δt ίση προς $\Delta p = \lambda \Delta t$, και με λ σταθερά, ανεξάρτητη του t. Χωρίζοντας το διάστημα (0,t) σε αντίστοιχα πολλά μικρά χρονικά διαστήματα, δείξτε οτι η πιθανότητα ο πυρήνας αυτός να είναι ακόμα αδιάσπαστος μετά από χρόνο t είναι

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \tag{16}$$

Λύση: Χωρίζω το χρονικό διάστημα (0,t) σε N ίσα κομμάτια, με N πολύ μεγάλο. Ορίζω αντίστοιχα τα μικρά χρονικά διαστήματα $\Delta t = t/N$. Η πιθανότητα να παραμείνει αδιάσπαστο το σωμάτιο το χρονικό διάστημα Δt είναι $P(\text{survive in } \Delta t) = 1 - P(\text{decay in } \Delta t) \simeq 1 - \lambda \Delta t$. Οπότε, η πιθανότητα το σωμάτιο να παραμείνει αδιάσπαστο για χρονικό διάστημα (0,t) είναι ίση με την πιθανότητα να μην διασπαστεί το πρώτο Δt, επί την πιθανότητα να μη διασπαστεί το επόμενο Δt, επί κ.τ.λ. μέχρι και το τελευταίο Δt, δηλαδή $(N \to \infty)$

$$P(t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \lambda \Delta t) \ldots (1 - \lambda \Delta t) = \left(1 - \lambda \frac{t}{N}\right)^N = e^{-\lambda t} \tag{17}$$

Ετσι προκύπτει πάλι ο τύπος της ραδιενέργειας, αφού από αυτό συνεπάγεται πως αν έχω αρχικά N_0 πυρήνες, μετά από χρόνο t θα ‘‘ζούν” $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

5. Βιβλίο Serway, Moses and Moyer: Κεφάλαιο 14, άσκηση 6 στη σελίδα 510.

Λύση: (α) Δίδεται η ενεργός διατομή σκέδασης πρωτονίων με κινητική ενέργεια 100 MeV από άτομα χρυσού. Επομένως, χρειαζόμαστε την πυκνότητα των ατόμων χρυσού στο φύλλο. Το 1 γραμμοάτομο χρυσού έχει μάζα 197 γραμμάρια και όγκο $V_{1\,mole} = m/\rho = 197gr/(19.3gr/cm^3) = 10.21cm^3$. Οπότε, $n_{Au} = N_A/V_{1\,mole} = N_A/10.21cm^{-3} = 0.59 \times 10^{23}cm^{-3}$. Οπότε, $n_{Au}\sigma = 0.59 \times 10^{23} \times 500 \times 10^{-24}cm^{-1} = 29.5cm^{-1}$. Αν d είναι το πάχος του φύλλου, έχουμε $n_{Au}\sigma d = 29.5cm^{-1} \times 5.1 \times 10^{-3}cm = 1.5 \times 10^{-1}$.

Αρα, $N/N_0 = e^{-n_{Au}\sigma d} = 0.86$.

(β) Από το ρεύμα και τη διατομή της δέσμης, μπορούμε να υπολογίσουμε πόσα πρωτόνια πέφτουν στο φύλλο στη μονάδα του χρόνου. Πράγματι, $dN/dt = 0.86 \times dN_0/dt$, όπου dN_0/dt είναι ο αριθμός πρωτονίων που πέφτουν στο φύλλο στη μονάδα του χρόνου. Ομως, το ρεύμα είναι $I = dQ/dt = |e|dN_0/dt$. Οπότε, $dN_0/dt = I/|e|$.

Αρα, τα πρωτόνια που τρυπάνε το φύλλο στη μονάδα του χρόνου είναι $dN/dt = 0.86 \times I/|e| = 0.86 \times 0.1 \times 10^{-6}(Cb/sec)/(1.6 \times 10^{-19}Cb) = 5.38 \times 10^{11}sec^{-1}$

(γ) Ο αριθμός των πρωτονίων που απομακρύνονται από τη δέσμη λόγω σκέδασης είναι τα υπόλοιπα, δηλαδή $dN_s/dt = 0.015 \times I/|e| = 8.75 \times 10^{10}sec^{-1}$.

6. Με βάση την ποσότητα Q της αντίστοιχης αντίδρασης να αποδείξετε οτι ο ασταθής πυρήνας ${}^{233}_{92}U$ δεν μπορεί να διασπαστεί αυθόρμητα δίνοντας p ή ${}^{3}_{2}He$, ενώ μπορεί να δώσει σωμάτιο α (${}^{4}_{2}He$). Χρησιμοποιείστε τους πίνακες για τις μάζες των εμπλεκόμενων σωματίων.

Λύση: Το Q της αντίδρασης ${}^{233}U \to^{232}_{91} X + p$ είναι

$$\begin{aligned} Q_1 &= (M_U - M_X - m_p)c^2 \simeq (233.039628 - 232.038565 - 1.007825)uc^2 \\ &\simeq -0.006762uc^2 \simeq -6MeV \end{aligned} \tag{18}$$

Αρα η αντίδραση είναι ενδόθερμη και δεν γίνεται αυθόρμητα.

Αντίστοιχα το Q της ${}^{233}U \to^{230}_{90} Y +^{3}_{2} He$ είναι

$$Q_2 = (233.039628 - 230.033128 - 3.016029)uc^2 \simeq -0.010529uc^2 \simeq -10MeV \tag{19}$$

επίσης αδύνατο να γίνει αυθόρμητα.

Τέλος, για την αντίδραση ${}^{233}U \to^{229}_{90} W +^{4}_{2} He$ έχουμε:

$$Q_3 = (233.039628 - 229.031755 - 4.002603)uc^2 \simeq +0.00527uc^2 \simeq +5.3MeV. \tag{20}$$

Αρα είναι εξώθερμη και γίνεται αυθόρμητα.