ΛΥΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΝΡ1

Διδάσκων: Θεόδωρος Ν. Τομαράς

1. Σε λεπτή επιφάνεια είναι χαραγμένες δύο παράλληλες σχισμές αμελητέου πάχους σε απόσταση d=12A μεταξύ τους. Δέσμη νετρονίων ορμής $p = 2\pi\hbar/(5A)$ ($h \equiv 2\pi\hbar = 6.63 \times 10^{-34} Jsec$ είναι η σταθερά του Planck) πέφτει πάνω στην οθόνη. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα των νετρονίων της δέσμης σε m/sec. (β) Πόσο είναι το μήκος κύματος της δέσμης των νετρονίων; (γ) Πόσα τοπικά μέγιστα και σε τι γωνίες θα παρατηρηθούν πάνω σε οθόνη, που βρίσκεται πίσω από την επιφάνεια σε μεγάλη απόσταση και είναι παράλληλη προς αυτήν;

Λύση: (α) Η ορμή των νετρονίων της δέσμης είναι $p = mv/\sqrt{1-v^2/c^2} = mc\beta\sqrt{1-\beta^2}$. Οπότε,

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{pc/mc^2}{\sqrt{1+(pc/mc^2)^2}} \,. \tag{1}$$

$$pc/mc^2 = \frac{2\pi\hbar c}{mc^2 \times 5A} = (\hbar = c = 1)\frac{2\pi}{m\lambda} = \frac{2\pi}{1GeV \times 5A} \simeq 2.5 \times 10^{-6} \,. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω βρίσκω

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \simeq 2.5 \times 10^{-6} \tag{3}$$

και από αυτήν

$$v \simeq 750\, m/sec \tag{4}$$

(β) Από την $p = h/\lambda = h/5A$ έπεται οτι το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων της δέσμης είναι $\lambda = 5A$.

(γ) Οι θέσεις των τοπικών μεγίστων είναι στις γωνίες θ_n που ικανοποιούν τη σχέση $\sin\theta_n = n\lambda/d = n \times 5A/12A = 5n/12$ με $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, ...$ Επιτρεπόμενες τιμές του ακεραίου n είναι οι $n = 0, \pm1, \pm2$, και αντιστοιχούν σε 5 μέγιστα, ήτοι το κεντρικό ($\theta_0 = 0$) και από δύο ένθεν και ένθεν αυτού.

2. Εκτιμείστε την ενέργεια που πρέπει να έχει δέσμη πρωτονίων ικανή να διερευνήσει την δομή της ύλης σε αποστάσεις της τάξης των $10^{-17}\, cm$.

Λύση: Για να διερευνήσω αποστάσεις της τάξης του $R \simeq 10^{-17} cm$, χρειάζομαι διακριτική ικανότητα $\delta \sim \lambda \sim R \sim h/p$. Οπότε, η ορμή των πρωτονίων της δέσμης που θα χρησιμοποιήσω, πρέπει να είναι $p \sim h/R \sim 2\pi\hbar/R \sim 2\pi\hbar \times 200MeV/(200MeV \times 10^{-13} \times 10^{-4} cm) \sim 12.56\, TeV$. Πρωτόνια με τέτοια ορμή έχουν ενέργεια $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \sim pc \sim 12.56\, eV$.

3. (α) Πυρήνας $^{12}_{7}N$ παράχθηκε στο εργαστήριο. Είναι ευσταθής ή ασταθής; Αν είναι ασταθής πώς διασπάται; Εξηγείστε.

(β) Το ίδιο για τον πυρήνα $^{8}_{3}Li$.

(γ) Συμφωνούν τα συμπεράσματά σας με τα στοιχεία που έχουν οι πίνακες των πυρήνων;

Λύση: (α) Τοποθετείστε τα πρωτόνια και τα νετρόνια στις ενεργειακές στάθμες του πυρήνα. Η κατανομή που καταλήγετε είναι ασταθής. Συμφέρει ενεργειακά ένα πρωτόνιο της τέταρτης στάθμης να μετατραπεί σε νετρόνιο και να πέσει στη τρίτη στάθμη, εκπέμποντας ένα ποζιτρόνιο και ένα ηλεκτρονικό νετρίνο (ραδιενέργεια β^+).

$$^{12}_{7}N \rightarrow^{12}_{6} C + e^+ + \nu_e \tag{5}$$

(β) Ομοίως, ο πυρήνας με 5 νετρόνια και 3 πρωτόνια είναι ασταθής. Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνετε οτι δίνει ραδιενέργεια β^-:

$$^{8}_{3}Li \rightarrow^{8}_{4} Be + e^- + \bar{\nu}_e \tag{6}$$

(γ) Οι πίνακες του βιβλίου του $Serway$ δεν έχουν καθόλου στοιχεία για τους δοσμένους αρχικούς πυρήνες. Μοιάζει να είναι τόσο ασταθείς (σύμφωνα και με τα παραπάνω συμπεράσματα) που δεν αναφέρονται κάν σε τέτοιους περιληπτικούς πίνακες.

4. Να χωρίσετε σε μποζόνια και φερμιόνια τα εξής σωμάτια: νετρόνιο, πυρήνας ^3He, άτομο ^4He, άτομο ^3H, άτομο ^2H, πυρήνας $^{12}_{6}C$, άτομο $^{14}_{7}N$, πυρήνας $^{6}_{3}Li$. Εξηγείστε με σαφήνεια τον ισχυρισμό σας.

Λύση: Φερμιόνια είναι τα σωματίδια με ημιακέραιο σπιν. Οι δέσμιες καταστάσεις περιττού αριθμού φερμιονίων έχουν ημιακέραιο σπιν και επομένως είναι φερμιόνια. Αντίστοιχα, τα μποζόνια έχουν ακέραιο σπιν. Οι δέσμιες καταστάσεις άρτιου αριθμού φερμιονίων είναι μποζόνια. Ετσι φερμιόνια είναι τα: νετρόνιο, πυρήνας ^3He, άτομο ^2H, άτομο $^{14}_{7}N$. Τα υπόλοιπα είναι μποζόνια.

5. Στο μάθημα Φ3 έχετε υπολογίσει τις ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου μάζας m σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους L και έχετε βρεί

$$E_n(m) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\, n^2 \ , \ \ n = 1, 2, 3, ... \tag{7}$$

(α) Πέντε πρωτόνια και τρία νετρόνια βρίσκονται μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι με L=10F. Αγνοείστε τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις (μια πολύ χονδρική προσέγγιση) και υπολογίσετε σε μονάδες eV ή πολλαπλάσιά του την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος. Δίδονται $m_p \simeq m_n \simeq 1GeV/c^2$ και $m_D \simeq 2GeV/c^2$.
(β) Το ίδιο για 5 πρωτόνια και 3 πυρήνες δευτερίου.
(γ) Το ίδιο για 8 πυρήνες δευτερίου.

Λύση: (α) Τα πρωτόνια όσο και τα νετρόνια έχουν σπιν 1/2 και επομένως είναι φερμιόνια με δύο δυνατές καταστάσεις, σπιν πάνω και σπιν κάτω. Στην προσέγγιση που οι μάζες του πρωτονίου και του νετρονίου είναι ίσες, οι ενεργειακές στάθμες των δύο ειδών σωματιδίων ταυτίζονται. Αρα κάθε κατάσταση μπορεί να χωρέσει το πολύ μέχρι δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Οπότε, η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης στην περίπτωση αυτή είναι

$$E(5p, 3n) = 4E_1(m_p) + 3E_2(m_p) + E_3(m_p) \tag{8}$$

(β) 5 πρωτόνια και 3 πυρήνες δευτερίου. Τα 5 πρωτόνια θα κατανεμηθούν όπως και προηγουμένως. Οι πυρήνες δευτερίου, που είναι μποζόνια (έχουν σπιν 1), θα πάνε όλα στη κατώτερη στάθμη των δευτερίων. Προσέξτε, οι στάθμες των δευτερίων έχουν διαφορετικές ενέργειες απο αυτές των νουκλεονίων λόγω της διαφορετικής τους μάζας. Οπότε,

$$E(5p, 3D) = 2E_1(m_p) + 2E_2(m_p) + E_3(m_p) + 3E_1(m_D) \tag{9}$$

(γ) Τα 8 δευτέρια θα καταλάβουν όλα τη θεμελιώδη στάθμη τους. Επομένως

$$E(8D) = 8E_1(m_D) \tag{10}$$

Αριθμητική εφαρμογή: (Σας υπενθυμίζω οτι σε μονάδες $\hbar = c = 1$ ισχύει $200MeV \times 1F = 1$.)

$$E_n(m_p) = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_p L^2} = n^2 \frac{\pi^2 \times 200MeV}{2 \times 5 \times 200MeV \times 10^2 F^2 \times 200MeV} \tag{11}$$

$$= n^2 \frac{2\pi^2 10^2}{10^3} MeV = 1.974 n^2 MeV \simeq 2n^2 MeV \tag{12}$$

Αντίστοιχα, οι ενεργειακές στάθμες των πυρήνων δευτερίου είναι

$$E_n(m_D) = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_D L^2} = \frac{m_p}{m_D} E_n(m_p) = 0.5 \times 1.974 n^2 MeV \simeq n^2 MeV \tag{13}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παίρνω:
(α) $E(5p, 3n) = (4 \times 2 \times 1^2 + 3 \times 2 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2) MeV = 58 MeV$
(β) $E(5p, 3D) = (2 \times 2 \times 1^2 + 2 \times 2 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2 + 3 \times 1^2)\, MeV = 41\, MeV$.
(γ) $E(8D) = 8 \times 1^2 MeV = 8MeV$.

6. Να υπολογισθεί η ενέργεια σύνδεσης ανα νουκλεόνιο του πυρήνα Μολύβδου $^{208}_{82}Pb$. Δίδονται η μάζα M του **ατόμου** του $^{208}_{82}Pb$ ίση προς $207.97664u$, η μάζα του πρωτονίου $1.007276u$, η μάζα του νετρονίου $1.008665u$ και η μάζα του ηλεκτρονίου $0.000549u$. Για τον υπολογισμό της μάζας του πυρήνα του Pb, που θα χρειαστείτε, χρησιμοποιείστε τις γνώσεις σας για τις τυπικές ενέργειες σύνδεσης των ηλεκτρονίων στα άτομα.

Λύση: Η ενέργεια σύνδεσης του ουρανίου είναι $E_b = (82m_p + 126m_n - M_{nucleus})c^2 \simeq (82m_p + 126m_n - M_{atom} + 82m_e)c^2 \simeq (82 \times 1.007276 + 126 \times 1.008665 - 207.97664 + 82 \times 0.000549)uc^2 \simeq 1636.424064MeV$.

Οπότε, η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο είναι $\epsilon_b = (1636.424064/208)MeV = 7.8674MeV$.

Στον παραπάνω υπολογισμό έχω αγνοήσει την ενέργεια σύνδεσης των ηλεκτρονίων στο άτομο. Οπως έχουμε συζητήσει στο μάθημα αυτή είναι 10^6 φορές μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας των ηλεκτρονίων και επομένως είναι αμελητέα στην προσέγγιση που κάνουμε εδώ.

7. Σε φασματογράφο μάζας με μαγνητικό πεδίο $B = 10^{-3}Tesla$ εισέρχεται πυρήνας $^{16}_{8}O$ με ορμή $p = 50keV/c$. Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου, που θα διαγράψει.

Οι πυρήνες οξυγόνου με τόσο μικρή ορμή είναι μή σχετικιστικοί. Επομένως, μπορώ με καλή προσέγγιση να χρησιμοποιήσω τον τύπο $mv^2/R = qvB$ για την κίνησή τους μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Κάνοντας χρήση επιπλέον και των σχέσεων $1T = 1kg/A \times sec^2 = 1kg/Cb \times sec$ και $1eV = 1|e|J/Cb$ με $|e|$ την απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου, παίρνω

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{50keV}{c \times 8|e| \times 10^{-3}T} = \frac{5 \times 10^4 |e| J/Cb}{3 \times 10^8 (m/sec) \times 8|e| \times 10^{-3} (kg/Asec^2)} = \tag{14}$$

$$= \frac{5 \times 10^4 m}{24 \times 10^5} = 2.085\, cm \tag{15}$$

8. Η μάζα του πρωτονίου οφείλεται στην ενέργεια των κουάρκς και των γλοιονίων που περιέχει σε αναλογία περίπου 1:1. Με δεδομένο οτι το μέγεθος του πρωτονίου είναι της τάξης του ενός Fermi και του γεγονότος οτι περιέχει τρία κουάρκς μάζας μερικών MeV το καθένα, χρησιμοποιείστε την αρχή της αβεβαιότητας και εκτιμείστε την μάζα του.

Λύση: Η αβεβαιότητα στη θέση του κάθε κουάρκ στο πρωτόνιο είναι περίπου ίση με ένα Fermi. Η ορμή του θα είναι επομένως $p \sim \Delta p \sim \hbar/\Delta x = \hbar/R$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για σωμάτια με μάζα μηδέν βρίσκω οτι η ενέργεια του ενός κουάρκ στο πρωτόνιο θα είναι $E_1 \sim p\,c \sim \Delta p\,c \sim \hbar c/R$. Οπότε, η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου θα είναι η ενέργεια των τριών κουάρκς του, σύν η συνεισφορά των γλοιονίων, ήτοι $Mc^2 \sim 2 \times 3 \times E_1 \sim 2 \times 3 \times \hbar c/R = 6 \times 200MeV/(200MeV \times 1F) = 1.2GeV$.