

## ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 11

Να λύσετε τις ασκήσεις 5-8. Μπορείτε να μου τις δώσετε προαιρετικά την ημέρα της τελικής εξέτασης.

Διδάσκων: Θεόδωρος Ν. Τομαράς

**1.** Πιστεύουμε ότι η Σκοτεινή Ενέργεια αποτελεί το 70% του περιεχομένου του Σύμπαντος σήμερα. Επιπλέον, πιστεύουμε ότι το Σύμπαν έχει  $k = 0$ , ήτοι ότι η συνολική ενεργειακή πυκνότητα του Σύμπαντος είναι ίση με την κρίσιμη  $\rho_c$ .

(α) Απλοποιήστε το Σύμπαν θεωρώντας ότι έχει μεν  $k = 0$  αλλά με τη Σκοτεινή Ενέργεια να καλύπτει το 100% της ενέργειάς του και λύστε την εξίσωση *Friedmann* για να προσδιορίσετε τον παράγοντα κλίμακας  $a(t)$  σαν συνάρτηση του χρόνου. (β) Σε πόσο χρόνο από σήμερα θα έχει διπλασιαστεί το μέγεθος του Σύμπαντος αυτού;

Λύση: (α) Για την περίπτωση σκοτεινής ενέργειας ( $w = -1$ ) έχουμε

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}} = \rho_0 = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στη πρώτη εξίσωση *Friedmann* παίρνουμε

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho = H_0^2 \quad (2)$$

της οποίας η λύση με  $a(t_0) = 1$  είναι

$$a(t) = e^{\pm H_0(t-t_0)} \quad (3)$$

(β) Η διαστελλόμενη λύση είναι

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (4)$$

Το μέγεθος του σύμπαντος θα έχει διπλασιαστεί όταν  $a(t) = 2$ , ήτοι όταν

$$t - t_0 = \frac{\ln 2}{H_0} \simeq 0.693 \times 13.6 \times 10^9 \text{years} \simeq 9.42 \text{Gyrs} \quad (5)$$

**2.** (α) Να αποδείξετε ότι σύμπαν με  $\rho + 3p/c^2 > 0$  διαστέλλεται επιβραδυνόμενο, ενώ με  $\rho + 3p/c^2 < 0$  η διαστολή επιταχύνεται. (β) Να δείξετε ότι στο υλοκρατούμενο ( $w = 0$ ) και στο φωτοκρατούμενο ( $w = 1/3$ ) σύμπαν η διαστολή επιβραδύνεται, ενώ σε αυτό που οποίο κυριαρχεί η σκοτεινή ενέργεια ( $w = -1$ ) η διαστολή είναι επιταχυνόμενη.

Λύση: (α) Από τη δεύτερη εξίσωση του *Friedmann*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (6)$$

προκύπτει ότι επιβράδυνση  $\ddot{a} < 0$  έχουμε για  $\rho + 3p/c^2 = (1 + 3w)\rho > 0$ , ενώ επιτάχυνση  $\ddot{a} > 0$  έχουμε για  $\rho + 3p/c^2 = (1 + 3w)\rho < 0$ .

(β) Επομένως, για  $w = 0$  ή  $w = 1/3$  έχουμε  $1 + 3w > 0$  και επομένως επιβράδυνση, ενώ για  $w = -1$  έχουμε  $1 + 3w = -2 < 0$  και επομένως επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος.

**3.** Να αποδείξετε ότι φωτοκρατούμενο σύμπαν με  $k = 0$  ή  $k = -1$  εκτείνεται επ' άπειρον, ενώ με  $k = +1$  φτάνει ένα μέγιστο μέγεθος και στη συνέχεια συστέλλεται μέχρι το *big crunch* (παράγοντας κλίμακας  $a = 0$ ).

Λύση: Για το φωτοκρατούμενο σύμπαν ισχύει

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4} \quad (7)$$

Η πρώτη εξίσωση *Friedmann* για φωτοκρατούμενο σύμπαν είναι επομένως

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{kc^2}{R_0^2} - \frac{\lambda}{a^2} = 0, \quad \lambda \equiv \frac{4\pi G\rho_0}{3} \quad (8)$$

Παρατηρείστε ότι η εξίσωση αυτή είναι η ίδια με αυτήν που περιγράφεται στη Κλασική Μηχανική τη μονοδιάστατη κίνηση (κατά μήκος του άξονα  $a$ ) και **με ολική ενέργεια μηδέν** ενός σώματος με μάζα  $m = 1$  στο δυναμικό

$$U(a) = \frac{kc^2}{R_0^2} - \frac{\lambda}{a^2} \quad (9)$$

Για  $k = 0, -1$  το δεξί μέλος της εξίσωσης αυτής είναι πάντα θετικό. Επομένως, η ταχύτητα διαστολής  $\dot{a}$  δεν μηδενίζεται ποτέ και το σύμπαν διαστέλλεται επ' άπειρον.

Αντίθετα, για  $k = +1$  η ταχύτητα διαστολής θα μηδενιστεί όταν το μέγεθος του σύμπαντος γίνει  $a^2 = \lambda R_0^2 / c^2$  και θα ακολουθήσει συστολή μέχρι το σύμπαν να "συνθλιβεί" σε μηδενικό μέγεθος.

**4.** Σήμερα το Σύμπαν έχει συνολική ενεργειακή πυκνότητα ίση με την κρίσιμη, και η οποία αποτελείται από  $\simeq 70\%$  σκοτεινή ενέργεια ( $\rho_{V,0} \simeq 0.7\rho_c$ ),  $\simeq 30\%$  μη σχετικιστική ύλη ( $\rho_{M,0} \simeq 0.3\rho_c$ ), και  $\simeq 0.0005\%$  ακτινοβολία ( $\rho_{R,0} \simeq 0.0005\rho_c$ ). Να σχεδιάσετε όσο πιο προσεκτικά μπορείτε τις καμπύλες  $\rho_i(a)$  όπου  $i = M, R, V$  συναρτήσει του παράγοντα κλίμακας  $a$  και να δείξετε στο γράφημα τις τιμές του  $a$  όπου είχαμε μετάβαση από φωτοκρατούμενο σύμπαν σε υλοκρατούμενο και από υλοκρατούμενο σε κενοκρατούμενο, που είναι σήμερα.

Λύση: Οι επί μέρους πυκνότητες ενέργειας δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho_M = \frac{\rho_{M,0}}{a^3}, \quad \rho_R = \frac{\rho_{R,0}}{a^4}, \quad \rho_V = \rho_{V,0} = constant \quad (10)$$

Σήμερα έχουμε εξ' ορισμού  $a = 1$ . Οπότε σχεδιάζετε τις παραπάνω σχέσεις με τις δοσμένες (σημερινές) τιμές για  $\rho_{i,0}$ ,  $i = V, M, R$ . Το σημείο τομής των  $\rho_R$  και  $\rho_M$  δίνει τη τιμή του  $a = a_{RM}$  για την οποία περάσαμε από φωτοκρατία σε υλοκρατία. Αντίστοιχα, το σημείο τομής των  $\rho_M$  και  $\rho_V$  δίνει το μέγεθος του σύμπαντος όταν πέρασε από υλοκρατία σε κενοκρατία.

**5.** Αν η συνολική ενεργειακή πυκνότητα στο Σύμπαν σήμερα ισούται με την κρίσιμη, να αποδείξετε (α) ότι αυτό ίσχυε στο παρελθόν και θα ισχύει και στο μέλλον, και (β) ότι το Σύμπαν είναι άπειρο και επίπεδο ( $k=0$ ).

**6.** Ποιά είναι τα κύρια επιχειρήματα για την ύπαρξη Σκοτεινής Ύλης; Εξηγείστε όσο πιο λεπτομερειακά μπορείτε.

**7.** Θεωρείστε ένα διαστελλόμενο κλειστό σύμπαν ( $k=+1$ ) που έχει μόνο σκοτεινή ενέργεια ( $w=-1$ ). Να αποδείξετε (α) ότι η πυκνότητα ενέργειας στο σύμπαν αυτό είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη πυκνότητα, και (β) ότι (αντίθετα από το τί θα συνέβαινε αν ήταν φωτοκρατούμενο ή υλοκρατούμενο) το σύμπαν αυτό ΔΕΝ θα καταρρεύσει.

**8.** Η θερμοκρασία του Σύμπαντος σήμερα είναι περίπου  $3 \text{ }^\circ\text{K}$ . Όταν η θερμοκρασία ήταν περί τους  $3000 \text{ }^\circ\text{K}$  συνδυάστηκαν τα πρωτόνια με τα ηλεκτρόνια και σχηματίστηκαν άτομα υδρογόνου. Πόσο μικρότερο ήταν το Σύμπαν τότε;