.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΣΤΗΝ

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Θεόδωρος Ν. Τομαράς

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ). Η τελική διατύπωση της ΕΘΣ έγινε από τον Albert Einstein στις αρχές του 20ού αιώνα [1], μετά από σημαντικά βήματα και συνεισφορές που προηγήθηκαν από φυσικούς και μαθηματικούς της εμβέλειας των Larmor, Fitzgerald, Michelson, Morley, Lorentz, Poincaré, Minkowski, αλλά και άλλων λιγότερο γνωστών, ήδη από το τέλος του 19ου αιώνα. Ιδιαίτερα ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία σχετικά με την ανάπτυξη της θεωρίας μπορείτε να βρείτε σε βιβλία όπως το [2].

Θα ήθελα απο την αρχή να τονίσω κάτι που ελπίζω θα γίνεται όλο και πιό σαφές στην συνέχεια. Η Θεωρία της Σχετικότητας δεν ειναι απλά μια θεωρία όπως πολλές που έχουν διατυπωθεί για να ερμηνεύσουν κάποια επι μέρους φαινόμενα. Η Θεωρία της Σχετικότητας έχει πολύ σημαντικές και αδιαφιλονίκητες συνέπειες. Μας περιγράφει ιδιότητες και συμμετρίες του χώρου και του χρόνου, της αρένας πάνω στην οποία διαδραματίζονται όλα τα φυσικά φαινόμενα, για σχετικά μικρές χωρικές αποστάσεις και χρονικά διαστήματα, τέτοια που να μπορούμε να αγνοήσομε την επίδραση του βαρυτικού πεδίου. Μας διδάσκει γενικές ιδιότητες και συμμετρίες κάθε νόμου και τύπου αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα έσχατα συστατικά της ύλης. Είναι τόσο γενική, με τόσο βαθειές συνέπειες στην αντίληψή μας για το χώρο και το χρόνο και τόσο εξαντλητικά επαληθευμένη πειραματικά μέχρι σήμερα [1], ώστε συνετέλεσε και αυτή στην ανακήρυξη του βασικού δημιουργού της Albert Einstein ως τής προσωπικότητας του 20ού αιώνα [2].

Η ανεπάρκεια της μηχανικής του Νεύτωνα

Δεν χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια για να πειστεί κανείς οτι η θεωρία του Νεύτωνα δεν μπορεί να αποτελεί θεμελειώδη θεωρία περιγραφής της φύσης. Αρκεί να προσπαθήσει να περιγράψει μια οποιαδήποτε πυρηνική διάσπαση. Ας πάρομε για παράδειγμα μία από τις αντιδράσεις που συμβαίνουν συνεχώς μέσα στον 'Ηλιο:

$$^{13}_{7}N \rightarrow ^{13}_{6} C + e^{+} + \nu_e \tag{1}$$

κατά την οποία ένα *ακίνητο* άτομο αζώτου μετατρέπεται στα σωμάτια του δευτέρου μέλους που παράγονται με μη μηδενικές ταχύτητες, ή μία τυπική αντίδραση διάσπασης του ραδιενεργού ουρανίου με εκπομπή ακτίνας α (πυρήνα του στοιχείου ηλίου)

$$^{238}_{92}U \rightarrow ^{234}_{90} Th + ^{4}_{2} He \tag{2}$$

Τέτοιες αντιδράσεις συμβαίνουν σε αστέρες, σε πυρηνικούς αντιδραστήρες, είτε φυσικά είτε τεχνητά και ελεγχόμενα. Ο Νεύτωνας μας δίδαξε οτι η ορμή και η ενέργεια ενός ελεύθερου σώματος μάζας M που κινείται με ταχύτητα **v** δίδονται απο τους τύπους

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad , \quad E = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{3}$$

αντίστοιχα. Επίσης έχετε μάθει οτι η ενέργεια και η ορμή ενός κλειστού συστήματος διατηρείται. Η ύπαρξη στη Φύση αντιδράσεων σαν τις προαναφερθείσες συνεπάγεται οτι ο παραπάνω τύπος για την ενέργεια δεν είναι σωστός. Πράγματι, με βάση τον τύπο αυτό η ενέργεια του συστήματος πριν τη διάσπαση είναι μηδέν, ενώ μετά είναι διαφορετική από το μηδέν. 'Αρα η

[1] Μέχρι σήμερα τα πειράματα είναι σε απόλυτη συμφωνία με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Πρέπει όμως πάντα να θυμόμαστε οτι μέχρι σήμερα έχομε διεισδύσει στη δομή της ύλης μέχρι αποστάσεις της τάξης του $10^{-16}cm$, και οτι δεν αποκλείεται να δούμε αποκλίσεις απο τις προβλέψεις της θεωρίας αυτής όταν μπορέσομε στο μέλλον να διερευνήσομε την δομή του χώρου και του χρόνου βαθύτερα. Υπάρχουν θεωρητικά επιχειρήματα που συνεπάγονται τέτοιες αποκλίσεις σε αποστάσεις της τάξης του $10^{-33}cm$.

[2] Από παγκόσμια δημοσκόπηση του περιοδικού Time στο τέλος του 1999.

ενέργεια υπολογισμένη με τον τύπο (3) δεν διατηρείται, και επομένως ο τύπος αυτός είναι λάθος. Μιά άλλη κατ' αρχήν λογική πρόταση άρσης του αδιεξόδου θα ήταν να ισχυριστεί κανείς ότι οι τύποι (3) είναι σωστοί, αλλά για κάποιο λόγο, η ενέργεια σε συστήματα και αντιδράσεις όπως οι παραπάνω δεν διατηρείται. Μιά τέτοια πρόταση ωστόσο δεν είναι ικανοποιητική για δύο τουλάχιστον λόγους. Πρώτον, γιατί δημιουργεί το ερώτημα γιατί διατηρείται με τόση ακρίβεια σε τόσα και τόσα άλλα συστήματα που έχομε μελετήσει. Συστήματα τόσο διαφορετικά όσο τα μηχανικά συστήματα της καθημερινής μας ζωής, ή το ηλιακό σύστημα σέβονται την διατήρησή της. Αυτό είναι σύμπτωση; Δεύτερον, δεν είναι εύκολο να εγκαταλείψομε τους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής, αφού είναι συνέπειες της ομοιογένειας του χρόνου και του χώρου μας, αντίστοιχα. Πιστεύομε οτι οι νόμοι της Φύσης δεν αλλάζουν από θέση σε θέση, ή από τη μία χρονική στιγμή στην άλλη [3]. Πιστεύομε και το επαληθεύουμε συνεχώς, οτι δεν υπάρχουν προεξάρχουσες θέσεις ή χρονικές στιγμές στη Φύση. Το πείραμα που κάνουμε σήμερα εδώ και τό ίδιο που θα επαναλάβουμε κάπου αλλού ή σε κάποια άλλη χρονική στιγμή, δίνουν τα ίδια αποτέλεσματα. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας, αντίστοιχα.

Αρα, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι υπάρχουν κάποιες ποσότητες που θα ονομάζομε ορμή και ενέργεια. Το ζητούμενο είναι να τις βρούμε και με αυτές να αντικαταστήσουμε τις (3).

Υπάρχει και άλλο επιχείρημα που οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα. Γνωρίζετε οτι τα φωτόνια, τα κβάντα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, είναι σωμάτια με μάζα μηδέν και κινούνται με πεπερασμένη ταχύτητα. Επίσης γνωρίζετε οτι τα φωτόνια μεταφέρουν ενέργεια και ορμή, αφού για παράδειγμα, το φως του ήλιου μας ζεσταίνει. 'Αν όμως χρησιμοποιήσετε τους παραπάνω τύπους θα καταλήξετε στο οτι η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου μηδενίζονται.

Δεν θα αναφέρω εδώ άλλα παραδείγματα. Ελπίζω να έχετε πειστεί οτι η νευτώνεια μηχανική δεν είναι πλήρης και αφήνει ανεξήγητα μια σειρά από φυσικά φαινόμενα της καθημερινότητάς μας. Αντ' αυτού, θα προχωρήσω στην βήμα-βήμα άρση των παραπάνω "παραδόξων", και στη διατύπωση των σωστών εκφράσεων για την ενέργεια και την ορμή των σωμάτων.

Προσοχή: Η Θεωρία του Νεύτωνα έχει επαληθευθεί με μεγάλη ακρίβεια στις βολές σωμάτων στο πεδίο βαρύτητας της Γης, στη κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ηλιο, σε κρούσεις μαζών με μικρές σχετικά ταχύτητες, στη μελέτη των ταλαντώσεων ενός στερεού, στη μελέτη των ενεργειακών σταθμών ενός ατόμου και αλλού. Η μελέτη όλων αυτών είτε κλασικά είτε κβαντικά έγινε με αφετηρία τους τύπους ενέργειας και ορμής της Νευτώνειας θεωρίας.

Συνεπώς, οι νέοι τύποι στους οποίους θα καταλήξουμε δεν θα ακυρώνουν την Νευτώνεια φυσική. Αντίθετα, θα οδηγήσουν σε τύπους και ιδιότητες, των οποίων κάποιο όριο (που θα καθοριστεί) θα είναι η Νευτώνεια φυσική, αλλά οι οποίοι θα έχουν ισχύ και πέραν αυτής, εκεί που το Νευτώνειο οικοδόμημα δεν επαρκεί.

[3] Τουλάχιστον για νόμους και φαινόμενα που δεν επηρρεάζονται από τη διαστολή του Σύμπαντος.

2 Τα αξιώματα της Σχετικότητας

Προκειμένου, για τις ανάγκες αυτής της παρουσίασης, να συντομεύσουμε την περιγραφή της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας και ιδιαίτερα των συνεπειών της, δεν θα ακολουθήσουμε την ιστορική πορεία των πειραμάτων, παραδόξων, προβληματισμών και βημάτων που οδήγησαν στην τελική της διατύπωση. Αντ' αυτού, θα ακολουθήσουμε το τρόπο με τον οποίο ο ιδιος ο Einstein παρουσίασε την Θεωρία στο μνημειώδες άρθρο του του 1905 [1]. Θα ξεκινήσουμε δηλαδή με τη διατύπωση των δύο βασικών αρχών/αξιωμάτων, και από εκεί θα "ανακαλύψουμε" το όλο οικοδόμημα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

1. Αξίωμα της Σχετικότητας του Einstein: Οι νόμοι της Φύσης είναι οι ίδιοι ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

2. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή ως προς κάθε αδρανειακό παρατηρητή. 'Οποιος από αυτούς μετρήσει την ταχύτητα του φωτός στο κενό θα βρεί την τιμή $c = 2.998 \times 10^8 m/sec$ [4].

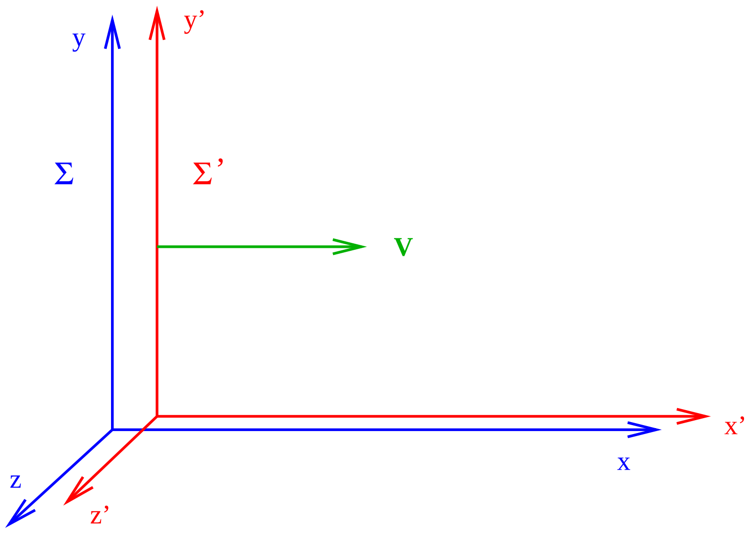
Μερικά σχόλια είναι απαραίτητα για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω αξιωμάτων:

α) Το αξίωμα της σχετικότητας του Einstein είναι γενίκευση του αντίστοιχου *αξιώματος του Γαλιλαίου*, το οποίο αναφερόταν μόνο στους νόμους της Μηχανικής, και όχι γενικά σε όλους τους νόμους της Φύσης. Στο Παράρτημα Ι μπορείτε να βρείτε μιά σύντομη επανάληψη των βασικών υποθέσεων και συμμετριών της μηχανικής του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα.

β) Τί είναι οι **Αδρανειακοί παρατηρητές;** Αδρανειακός παρατηρητής ή ισοδύναμα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ένα σύστημα στο οποίο ένα ελεύθερο "σώμα", ένα σώμα πάνω στο οποίο δεν δρα καμμία δύναμη, κινείται με σταθερή ταχύτητα. Φανταστείτε ένα σώμα κάπου στο "κενό" διάστημα, μακρυά από όλα τα υπόλοιπα ουράνια σώματα, τους αστέρες, τους γαλαξίες και τα σμήνη γαλαξιών. Ενα τέτοιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί με πολύ καλή προσέγγιση ελεύθερο. Φανταστείτε τώρα έναν παρατηρητή εγκατεστημένο με το εργαστήριό του στην παραπάνω περιοχή του διαστήματος να παρατηρεί την κίνηση του σώματος αυτού σε ένα σύστημα αξόνων "στερεωμένο" στους "απλανείς αστέρες". Η εμπειρία μας διδάσκει ότι ως προς τον παρατηρητή αυτόν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Επομένως, το σύστημα συντεταγμένων το στερεωμένο στους απλανείς αστέρες είναι αδρανειακό. Κάθε άλλο σύστημα που διαφέρει από το προηγούμενο ως προς την θέση της αρχής των αξόνων, ή τον προσανατολισμό τους είναι επίσης αδρανειακό. Το ελεύθερο σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς όλα αυτά. Τέλος, κάθε σύστημα αναφοράς (παρατηρητής) που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς οποιοδήποτε από τα παραπάνω, βλέπει το ελεύθερο σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα, και επομένως είναι και αυτό αδρανειακό.

'Οποτε στη συνέχεια αναφερόμαστε σε δύο αδρανειακούς παρατηρητές με μή μηδενική σχετική ταχύτητα, θα χρησιμοποιούμε το διάγραμμα του Σχήματος 1. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα προσανατολίζομε τους χωρικούς άξονες των δύο συστημάτων ώστε να είναι παράλληλοι μεταξύ τους, και με τρόπο ώστε η σχετική ταχύτητά τους να είναι στην κοινή κατεύθυνση x.

[4] Από το 1983 και για να αποφεύγονται σφάλματα που υπήρχαν σε προηγούμενους ορισμούς, το μέτρο ($1m$) ορίζεται ως η απόσταση που διανύει το φώς στο κενό σε χρόνο 1/299792458 sec. Εκτενή περιγραφή των προτύπων και των μονάδων μέτρησης μπορείτε να βρείτε στην παράγραφο 1-3 του βιβλίου "Πανεπιστημιακή Φυσική", H.D. Young, Εκδόσεις Παπαζήση 1994.



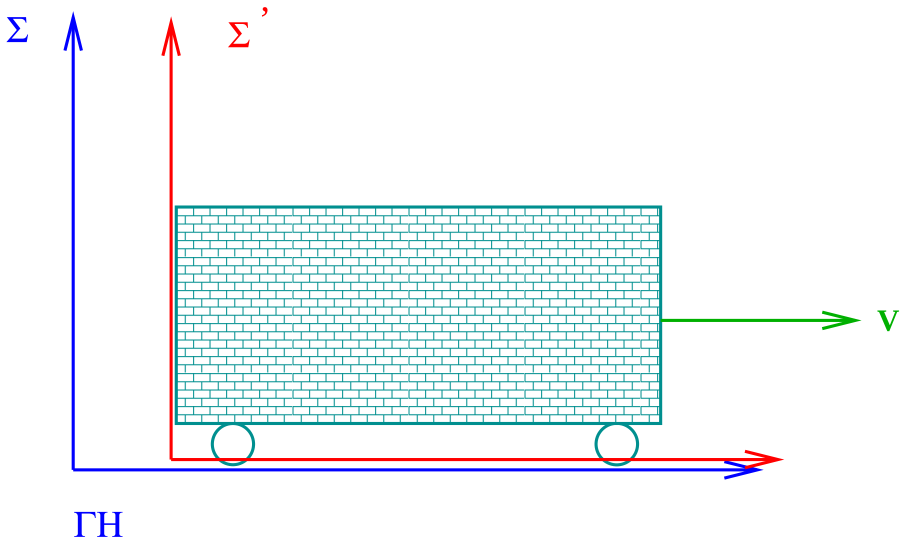
Σχήμα 1: Σχηματική παράσταση δύο αδρανειακών συστημάτων $\Sigma\{x, y, z\}$ και $\Sigma'\{x', y', z'\}$, με σχετική ταχύτητα V κατά την κοινή κατεύθυνση x.

Για επίγεια πειράματα μελέτης φαινομένων στα οποία μπορούμε να αγνοήσομε την επίδραση της βαρύτητας και την κίνηση της Γης, το σύστημα οποιουδήποτε γήϊνου εργαστηρίου είναι με καλή προσέγγιση αδρανειακό. Κατά τη μελέτη ενός φαινομένου μικρής χρονικής διάρκειας, η ταχύτητα του εργαστηρίου ως προς το “πρότυπο” σύστημα των απλανών αστέρων μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και επομένως το σύστημα του εργαστηρίου είναι αντιστοίχως αδρανειακό. Τέλος, ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα, ορίζει επίσης ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Γι' αυτό και μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε ένα σχήμα σαν το Σχήμα 2 και θα αναφερόμαστε στη Γη και στο τραίνο, προκειμένου να έχουμε εποπτεία δύο αδρανειακών συστημάτων.

Υπάρχουν μή αδρανειακά συστήματα αναφοράς; Φυσικά και υπάρχουν. Τα περισσότερα είναι μή αδρανειακά. Για παράδειγμα, ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι μή αδρανειακό. Ενα επιταχυνόμενος παρατηρητής ορίζει ένα μή αδρανειακό σύστημα αφού ένα ελεύθερο σώμα έχει ως προς αυτόν μή μηδενική επιτάχυνση. Σύστημα αναφοράς στερεωμένο στη Γη είναι μή αδρανειακό.

Τα αδρανειακά συστήματα είναι εξιδανικεύσεις ή προσεγγίσεις μή αδρανειακών συστημάτων. Ωστόσο, το ότι τους δίνουμε ιδιαίτερη σημασία οφείλεται στο γεγονός ότι οι Νόμοι της Φύσης έχουν σε αυτά την απλούστερη διατύπωση [5].

[5] Η μεταγραφή των νόμων σε κάθε άλλο γίνεται με τον αντίστοιχο μετασχηματισμό των συντεταγμένων από το αδρανειακό σε αυτό. Ετσι, για παράδειγμα, μετασχηματίζοντας την εξίσωση κίνησης του Νεύτωνα από αδρανειακό σύστημα σε περιστρεφόμενο ανακαλύπτει κανείς τη δύναμη Coriolis.



Σχήμα 2: Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς με σχετική ταχύτητα V.

γ) **Νόμοι** είναι οι εξισώσεις κίνησης. 'Ετσι, σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας του Einstein, οι εξισώσεις κίνησης των σωματίων και των πεδίων στη Φύση είναι οι ίδιες ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Ο γνωστός σας και πειραματικά επιβεβαιωμένος δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, ότι δηλαδή ένα ελεύθερο σωμάτιο κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς, είναι νόμος της Φύσης και ισχύει για κάθε αδρανειακό παρατηρητή. Η ταχύτητες που μετράνε δύο διαφορετικοί τέτοιοι παρατηρητές είναι εν γένει διαφορετικές. 'Ομως και για τους δύο θα παραμένουν σταθερές.

'Ενα άλλο παράδειγμα. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική ενός συστήματος φορτίων σε αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό τους πεδίο, έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που θα μετρήσουν σε κάποια θέση του χώρου και σε κάποια χρονική στιγμή δύο διαφορετικοί παρατηρητές θα είναι διαφορετικά. Η ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των φορτίων που θα μετρήσουν κάποια χρονική στιγμή οι παρατηρητές θα είναι εν γένει διαφορετικές. Οι νόμοι όμως που διέπουν την δυναμική τους, δηλαδή οι εξισώσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά και καθορίζουν την παραπέρα χρονική εξέλιξη του συστήματος των σωματίων και των πεδίων, είναι *ταυτόσημοι*.

Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν με πειράματα που εκτελούμε σε ένα αδρανειακό σύστημα να αποφανθούμε αν κινείται ή όχι με σταθερή ταχύτητα, και να μετρήσομε την ταχύτητα αυτή. Για παράδειγμα, πειράματα μέσα σε κλειστό βαγόνι τρένου που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη Γη δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν κινούμαστε ή όχι.

γ) Αντίστροφα, η αρχή της σχετικότητας του Einstein επιβάλλει περιορισμούς και μας καθοδηγεί στην αναζήτηση άγνωστων μέχρι σήμερα νόμων που διέπουν τα φυσικά συστήματα. Οι θεμελιώδεις νόμοι της δυναμικής των έσχατων συστατικών της ύλης και των φορέων των αλληλεπιδράσεων στη Φύση δεν είναι αυθαίρετοι. Αποδεκτοί είναι μόνο εκείνοι που υπακούουν στην αρχή της σχετικότητας, έχουν δηλαδή την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

'Οπως θα δούμε παρακάτω, η μηχανική των Γαλιλαίου-Νεύτωνα δεν σέβεται την αρχή της σχετικότητας του Einstein. 'Αρα δεν μπορεί σύμφωνα με τα παραπάνω να αποτελεί θεμελιώδη θεωρία της φύσης.

Απο την άλλη όμως περιγράφει με εξαιρετική ακρίβεια την κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο, ή την τροχιά βλήματος στο βαρυτικό πεδίο της γης. 'Οπως θα γίνει σαφές παρακάτω, η μηχανική του Νεύτωνα είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της σχετικιστικής μηχανικής όταν εφαρμόζεται για την μελέτη συστημάτων σωματίων που κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιές είναι οι τυπικές ταχύτητες των πλανητών γύρω από τον ήλιο; Ποιές είναι οι τυπικές σχετικές ταχύτητες τών αστέρων του γαλαξία μας; Ποιές είναι οι τυπικές ταχύτητες των ηλεκτρονίων σε ένα άτομο; 'Ολες αυτές είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό και σωστά χρησιμοποιούσατε το τυπολόγιο της μηχανικής του Νεύτωνα για να περιγράψετε τα αντίστοιχα συστήματα.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Με τί ταχύτητα κινούνται τα φωτόνια; Με τί ταχύτητα απομακρύνονται από εμάς οι πιό μακρινοί γαλαξίες πού έχομε παρατηρήσει; Η περιγραφή τέτοιων συστημάτων με την Νευτώνια μηχανική οδηγεί σε συμπεράσματα που απέχουν πολύ από την πραγματικότητα.

δ) Ενώ το πρώτο αξίωμα είναι τουλάχιστον φραστικά γνώριμο από την εποχή του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα, και αποτελεί μια εύκολα αποδεκτή απαίτηση πάνω στη δομή των φυσικών νόμων, το δεύτερο εκπλήσσει, αφού είναι σε προφανή αντίθεση με φαινομενικά εδραιωμένη γνώση για τη φύση.

Ας θεωρήσομε το σκηνικό του Σχήματος 2 και ας πάρομε ένα σώμα να κινείται μέσα στο τραίνο με ταχύτητα v' ως προς αυτό και προς τα δεξιά. Θα λέγατε λοιπόν οτι σε χρόνο Δt το σώμα διανύει μιά απόσταση $v'\Delta t$ μέσα στο τραίνο. Ως προς τον παρατηρητή της αποβάθρας από την άλλη μεριά, στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt το τρένο έχει μετατοπιστεί ολόκληρο κατά $V\Delta t$. Συνολικά, επομένως, ως προς την αποβάθρα το σώμα θα έχει διανύσει απόσταση $(v' + V)\Delta t$. Η ταχύτητά του, επομένως, ως προς τον παρατηρητή στην αποβάθρα θα είναι

$$v = v' + V \tag{4}$$

ο γνώριμός σας κανόνας σύνθεσης ταχυτήτων (βλέπε Παράρτημα Ι).

Στη θέση του σώματος ας πάρομε τώρα το μέτωπο ενός φωτεινού σήματος. Αν c' είναι η ταχύτητα του μετώπου του σήματος αυτού ως προς το τραίνο, η ταχύτητά του ως προς την αποβάθρα θα είναι

$$c = c' + V \neq c' \; ! \tag{5}$$

Πώς είναι δυνατόν, λοιπόν, να ισχυρίζεται κάποιος οτι η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή ως προς όλους τους παρατηρητές; Ποιά είναι η λύση του παράδοξου; Πού είναι το λάθος στον παραπάνω συλλογισμό;

Κατ' αρχήν αυτό υποδεικνύουν τα αποτελέσματα του πειράματος των Michelson και Morley, που θα περιγράψομε σε κάποιο Παράρτημα.

Από την άλλη, όπως θα δούμε ευθύς αμέσως το δεύτερο αξίωμα συνεπάγεται οτι είμαστε υποχρεωμένοι να εγκαταλείψομε την υπόθεση που κάναμε παραπάνω, οτι δηλαδή το χρονικό διάστημα Δt ανάμεσα σε δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητο απο τον παρατηρητή που το μετράει, το ίδιο δηλαδή στο συγκεκριμμένο παράδειγμα τόσο για τον παρατηρητή στο τρένο όσο και για τον παρατηρητή στην αποβάθρα. Η ύπαρξη ενός *απόλυτου παγκόσμιου χρόνου*, που ήταν βασική υπόθεση της μηχανικής των Γαλιλαίου και Νεύτωνα, δεν είναι αλήθεια. Κάθε σύστημα αναφοράς, κάθε παρατηρητής χρησιμοποιεί τον δικό του χρόνο για τον χαρακτηρισμό των γεγονότων και την μέτρηση των χρονικών αποστάσεων ανάμεσά τους.

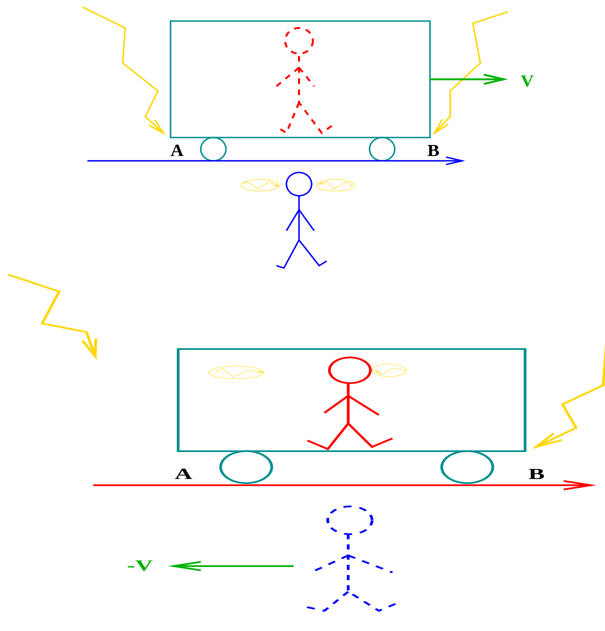
3 Η σχετικότητα του ταυτόχρονου

Μιά πρώτη άμεση συνέπεια του πεπερασμένου της ταχύτητας του φωτός είναι η *σχετικότητα του ταυτόχρονου*. Δύο γεγονότα που συμβαίνουν ταυτόχρονα ως προς κάποιον παρατηρητή, δεν είναι εν γένει ταυτόχρονα ως προς άλλους.

Δύο γεγονότα, όπως για παράδειγμα το άναμα δύο λαμπτήρων στις θέσεις A και B στο χώρο, είναι *ταυτόχρονα* ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς όταν τα φωτεινά κύματα που εκπέμπονται από αυτούς συναντώνται στο μέσον του διαστήματος AB.

Φανταστείτε τώρα τα δύο συστήματα αναφοράς του Σχήματος 2. Το ένα είναι το σύστημα Σ της αποβάθρας και το άλλο το σύστημα Σ' στερεωμένο πάνω σε τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα V όπως στο Σχήμα 3. Φανταστείτε τώρα οτι δύο κεραυνοί χτύπησαν στις θέσεις A και B αντίστοιχα, και οτι πεύτοντας άφησαν σημάδια τόσο πάνω στο έδαφος, όσο και πάνω στα αντίστοιχα πάνω στο τρένο. Ας υποθέσομε οτι τα δύο αυτά γεγονότα συνέβησαν ταυτόχρονα στο σύστημα Σ. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, αυτό σημαίνει οτι ο παρατηρητής $\mathcal{O}$, ακίνητος πάνω στην αποβάθρα και στο μέσον της απόστασης ανάμεσα στα σημεία A και B, που σημάδεψαν οι δύο κεραυνοί, θα δεί το φως από τις δύο λάμψεις να φτάνει σ' αυτόν την ίδια χρονική στιγμή.

Τί θα δεί όμως ο παρατηρητής $\mathcal{O}'$, ακίνητος πάνω στο τραίνο στο μέσον της απόστασης ανάμεσα στα σημάδια A και B των δύο κεραυνών; Εφ' όσον ο $\mathcal{O}'$ κινείται προς την κατεύθυνση του B και αντίστοιχα απομακρύνεται από το A, θα δεί την πτώση του κεραυνού στο B *πρίν* από αυτήν στο A. Τα γεγονότα $\mathcal{A}$: *"Πτώση του κεραυνού στο A"* και $\mathcal{B}$: *"Πτώση του κεραυνού στο B"* είναι ταυτόχρονα για τους παρατηρητές τους ακίνητους στην αποβάθρα, ενώ για τους ακίνητους ταξιδιώτες του τραίνου το $\mathcal{B}$ προηγήθηκε του $\mathcal{A}$.



Σχήμα 3: Τα συστήματα της αποβάθρας και του τραίνου. Τα γεγονότα και $\mathcal{B}$ είναι ταυτόχρονα ως προς το πρώτο, αλλά το προηγείται του $\mathcal{A}$ ως προς το δεύτερο.

'Αρα, ο ένας παρατηρητής μετράει χρονική απόσταση $\Delta t = 0$ ανάμεσα στα γεγονότα που περιέγραψα, ενώ ο ευρισκόμενος πάνω στο τρένο μετράει $\Delta t' \neq 0$. Γενικά, δεν μπορούμε να μιλάμε για την *χρονική απόσταση* ανάμεσα σε δύο γεγονότα χωρίς προηγουμένως να προσδιορίσομε σε ποιόν *παρατηρητή* αναφερόμαστε. Αν ο $\mathcal{O}$ μετράει Δt, ο $\mathcal{O}'$ θα μετράει εν γένει $\Delta t' \neq \Delta t$.

Προφανώς, αν όπως υπέθετε ο Νεύτωνας, η ταχύτητα μετάδοσης του φωτός ήταν άπειρη, τα δύο αυτά γεγονότα θα ήταν ταυτόχρονα ως προς όλους τους παρατηρητές, όπου και αν βρίσκονταν στο Σύμπαν, και με ό,τι ταχύτητα ή επιτάχυνση και αν κινούνταν. Γενικά, στη περίπτωση αυτή οι χρονικές αποστάσεις γεγονότων θα ήταν οι ίδιες ως προς όλους τους παρατηρητές, αδρανειακούς και μή.

4 Η διαστολή του χρόνου

Ποιά ακριβώς είναι η σχέση που συνδέει το Δt με το $\Delta t'$ για μια δεδομένη σχετική ταχύτητα V των δύο παρατηρητών; Πριν απαντήσομε το ερώτημα αυτό γενικά, θα ξεκινήσω με έναν ειδικό συνδυασμό γεγονότων και παρατηρητών για τους οποίους η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα εύκολο να προσδιοριστεί.

Ας πάρομε λοιπόν την περίπτωση ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς Σ, και *δύο γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση ως προς τον Σ*. Σ' είναι ένας άλλος παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα V ως προς τον Σ, όπως δείχνει το Σχήμα 1.

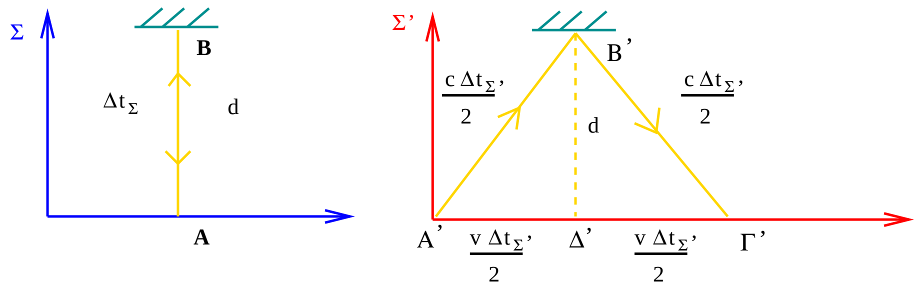
Τα δύο αυτά γεγονότα μπορεί να είναι ο,τιδήποτε. Να μερικά παραδείγματα:

(α) Η διέλευση ενός ηλεκτρονίου από την αρχή των αξόνων ενός αδρανειακού συστήματος, και το άναμα ενός λαμπτήρα στην ίδια θέση.

(β) Φανταστείτε εμένα να κινούμαι ως προς εσάς (καθισμένοι στα θρανία σας) με ταχύτητα V κρατώντας σταθερά στα χέρια μου ένα απλό εκκρεμές, που εκτελεί ταλάντωση. Δύο διαδοχικές μέγιστες απομακρύνσεις του εκκρεμούς συνιστούν δύο γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στο ίδιο σημείο ως προς το σύστημα αναφοράς το στερεωμένο πάνω μου. Εσείς αποτελείτε το σύστημα Σ'.

(γ) Φανταστείτε πάλι κάποιον που βαδίζει με σταθερή ταχύτητα ως προς εσάς. Η καρδιά του και επομένως και το κάθε μόριό της εκτελεί περιοδική κίνηση. Δύο μέγιστες απομακρύνσεις ενός μορίου της είναι δύο γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση ως προς τον πεζό. Ο πεζός και εσείς θα υπολογίζετε διαφορετικές τιμές για την ηλικία του, αφού αυτή καθορίζεται από το βιολογικό ρυθμό, δηλαδή από την περίοδο της καρδιακής κίνησης.

Η σχέση ανάμεσα στις χρονικές αποστάσεις Δt και $\Delta t'$ δύο γεγονότων, που λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση ως προς το ένα σύστημα αναφοράς, μπορεί να προσδιοριστεί με το εξής τέχνασμα, που βασίζεται στο δεύτερο αξίωμα: Ας πάρουμε μία ράβδο, στο ένα άκρο της οποίας έχομε στερεώσει μια λάμπα και στο άλλο έναν καθρέπτη κάθετα στη ράβδο, όπως δείχνει το Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Η διάταξη της ράβδου με τον λαμπτήρα και το κάτοπτρο.

Η λάμπα ανάβει κάποια στιγμή και το φως της διαδίδεται μέχρι τον καθρέπτη, ανακλάται και επιστρέφει εκεί από όπου ξεκίνησε. Τα γεγονότα A=*εκπομπή της φωτεινής δέσμης* και B=*επιστροφή της στο σημείο εκκίνησης* είναι δύο γεγονότα που λαμβάνουν χώρα εξ ορισμού στο ίδιο σημείο στο σύστημα αναφοράς (Σ) της ράβδου. Ως προς το σύστημα Σ το φως διήνυσε απόσταση 2(AB)=2d με ταχύτητα c, και επομένως, ο χρόνος που πέρασε από την εκπομπή του φωτός μέχρι την επιστροφή του στο σημείο εκκίνησης είναι

$$(\Delta t)_\Sigma = \frac{2d}{c} \tag{6}$$

Ο παρατηρητής Σ και μαζί με αυτόν η ράβδος, κινούνται ως προς τον Σ' με ταχύτητα V προς τα δεξιά, όπως δείχνει το Σχήμα 4. Επομένως, ο Σ' θα δει την δέσμη φωτός να ακολουθεί την τροχιά Α'Β'Γ' και με τήν ίδια ταχύτητα c σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα. Προφανώς, αφού η απόσταση Α'Β'Γ' είναι μεγαλύτερη της 2d, ο χρόνος $\Delta t_{\Sigma'}$ που ο Σ' θα μετρήσει ανάμεσα στα γεγονότα Α και Β θα είναι μεγαλύτερος του Δt_Σ. Για να βρούμε τη σχέση που τους συνδέει ας εφαρμόσομε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο Α'Β'Δ'. Παίρνομε

$$\Big(\frac{V\Delta t_{\Sigma'}}{2}\Big)^2 + d^2 = \Big(\frac{c\Delta t_{\Sigma'}}{2}\Big)^2 \tag{7}$$

Η απόσταση που διήνυσε το φως στην κάθετη κατεύθυνση είναι d και ως προς τον Σ'. Ο λόγος είναι ότι, όπως μπορεί κανείς να δείξει με τη μέθοδο της εις άτοπον αναγωγής, το κάθετο στη κίνηση μήκος της ράβδου είναι το ίδιο ως προς τους δύο παρατηρητές.

Πράγματι, για να πειστείτε θεωρείστε δύο ράβδους Ρ1 και Ρ2 με το ίδιο μήκος στο σύστημα ηρεμίας τους. Φανταστείτε ότι κρατάτε την Ρ1 και θέτετε σε κίνηση την Ρ2 σε κατεύθυνση κάθετη και προς τις δύο.

Εστω ότι το μήκος της κινούμενης ράβδου Ρ2 είναι μικρότερο από αυτό της Ρ1. Τότε με κατάλληλο σχεδιασμό του πειράματος, ώστε όταν οι δύο ράβδοι συμπέσουν τα κάτω άκρα τους να συμπίπτουν, η Ρ2 με ακίδα που έχει στο πάνω άκρο της θα χαράξει την Ρ1.

Αντίθετα, ένας δεύτερος παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς την Ρ2 θα συμπεράνει ότι η Ρ2 θα χαραχτεί από την Ρ1, αφού με βάση την υπόθεση ως προς αυτόν η Ρ1 είναι μικρότερη. Αυτό είναι άτοπο, αφού **το αποτέλεσμα του πειράματος** (το ποιά ράβδος θα έχει τη χαραγή στο τέλος) **είναι μοναδικό** και με αυτό πρέπει να συμφωνούν όλοι οι παρατηρητές.

Κατά συνέπεια η υπόθεση ότι η κινούμενη ράβδος είναι μικρότερη είναι λάθος, και το συμπέρασμα είναι ότι **τα μήκη κάθετα στην κατεύθυνση κίνησης δεν αλλάζουν.**

Λύνοντας την (7) ως προς $\Delta t_{\Sigma'}$, κάνοντας χρήση και της (6), καταλήγομε στον τύπο της **διαστολής του χρόνου**

$$\boxed{\Delta t_{\Sigma'} = \frac{\Delta t_\Sigma}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}} \tag{8}$$

Ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος είναι μικρότερος από την μονάδα. Αρα, ο χρόνος που μετράει ο παρατηρητής (Σ') που κινείται ως προς την θέση των δύο γεγονότων, είναι μεγαλύτερος απο αυτόν που μετράει ο παρατηρητής (Σ) ως προς τον οποίο τα γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο.

Σημειώστε οτι διαλέγοντας κατάλληλα το μήκος της ράβδου μπορούμε να κάνομε τη χρονική απόσταση Δt ανάμεσα στα γεγονότα της συσκευής αυτής να συμπίπτει με την απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα οποιουδήποτε απο τα παραδείγματα (α)-(γ). Κατά συνέπεια, η παραπάνω σχέση αναφέρεται και σε οποιαδήποτε ζεύγη γεγονότων, αρκεί να λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση του ενός από τους δύο παρατηρητές.

Εφαρμογή 1: Η διάσπαση του μ-μεσονίου. Το μιόνιο μ έχει μέσο χρόνο ζωής $\tau_\mu \simeq 2.2 \times 10^{-6} sec$. Ζει δηλαδή *ως προς το σύστημα ηρεμίας του* [6] κατά μέσο όρο χρόνο τ_μ προτού διασπαστεί σε e, ν_μ και $\bar{\nu}_e$.

Ας πάρομε τώρα ενα μιόνιο που κινείται μέσα σε έναν επιταχυντή, ή ένα των κοσμικών ακτίνων που πέφτει προς την Γη με ταχύτητα V. Πόσο χρόνο τ'_μ (πάντα κατά μέσο όρο) θα ζήσει το σωμάτιο αυτό ως προς παρατηρητή ακίνητο στη Γη;

Τα γεγονότα *δημιουργία* και *διάσπαση* του μεσονίου λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση στο σύστημα ηρεμίας του (Σ). Απο την (8) βρίσκομε

$$\tau'_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{9}$$

Επομένως, ως προς τον γήινο παρατηρητή ένα τέτοιο μεσόνιο στη διάρκεια της ζωής του

[6] Οι χρόνοι ζωής των σωματίων ορίζονται **πάντα** ως προς το σύστημα ηρεμίας τους, που είναι το πιό χαρακτηριστικό σύστημα γιά κάθε σωμάτιο.

θα διανύσει μέση απόσταση ίση προς

$$l' = V\tau'_\mu = \frac{V\tau_\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{10}$$

Εφαρμογή 2: Ο μέσος χρόνος ζωής ενός κοσμοναύτη. Κοσμοναύτης ταξιδεύει στο διάστημα με ταχύτητα V ως προς την Γη. Ο μέσος χρόνος ζωής του (στο σύστημα ηρεμίας του) είναι ας πούμε τ=76 έτη. 'Ενας παρατηρητής στη Γη θα μετρήσει στο δικό του ρολόϊ οτι πέρασαν

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{11}$$

Για V πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός, ο χρόνος τ' μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλος, και η απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας κοσμοναύτης στην διάρκεια της 76χρονης ζωής του, επίσης αυθαίρετα μεγάλη. Αυτά συμπεραίνει ο γήινος παρατηρητής. 'Αρα διαλέγοντας αρκετά μεγάλη ταχύτητα, μπορεί κάποιος να φύγει απο την Γη και να πάει όσο σύντομα θέλει για παράδειγμα στον γαλαξία Ανδρομέδα, που σύμφωνα με τους αστρονόμους στη Γη, απέχει απο τη Γη περί 2 εκατομμύρια έτη φωτός.

Ερώτηση 1: Με τί ταχύτητα ως προς τη Γη πρέπει να ταξιδέψει κάποιος ώστε σε ένα έτος (δικό του) να φτάσει στην Ανδρομέδα που απέχει απο τη Γη 2 εκατομμύρια έτη φωτός;

Η ζητούμενη ταχύτητα V δίδεται απο τη σχέση

$$\frac{V \times 1year}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 2 \times 10^6 years \times c \tag{12}$$

δηλαδή

$$\frac{V}{c} \sim 1 - \frac{1}{8 \times 10^{12}} \tag{13}$$

Ερώτηση 2: Πόσος χρόνος τ' πέρασε σύμφωνα με τον γήινο παρατηρητή ανάμεσα στην αναχώρηση του κοσμοναύτη απο τη Γη και την άφιξή του στην Ανδρομέδα;

Ο τύπος (8) δίνει

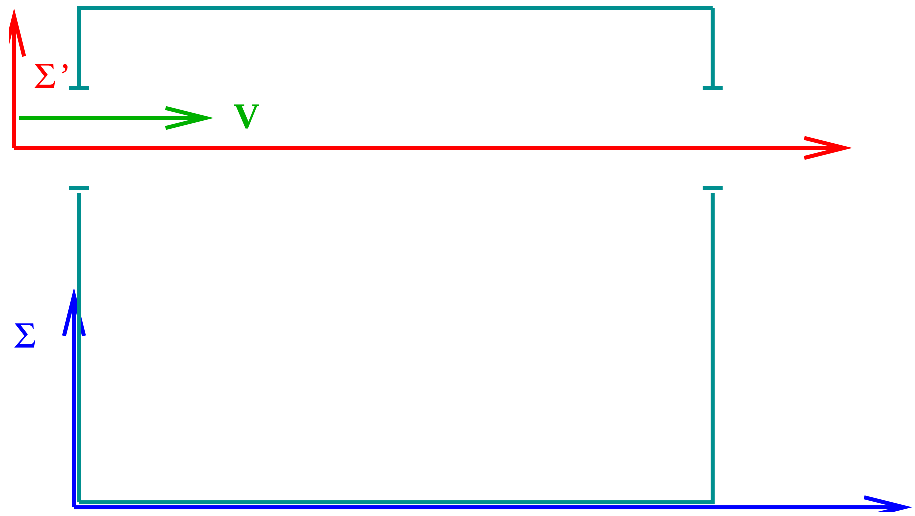
$$\tau' = \frac{1\,year}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \sim 2 \times 10^6\,years \tag{14}$$

Δυστυχώς, ο Γήινος παρατηρητής δεν θα ζεί για να μάθει τι είδε ο κοσμοναύτης στον μακρινό γαλαξία που επισκεύτηκε.

5 Η συστολή του μήκους

Θα χρησιμοποιήσω τώρα τα παραπάνω για να αποδείξω οτι και οι χωρικές αποστάσεις εξαρτώνται από τον παρατηρητή που τις μετράει. Δύο παρατηρητές με σχετική ταχύτητα V που μετράνε την απόσταση ανάμεσα σε δύο δεδομένα σημεία, βρίσκουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Φανταστείτε δύο διαφορετικούς παρατηρητές/συστήματα συντεταγμένων να μετράνε το φάρδος της αίθουσας διδασκαλίας. Ο ένας είναι ο παρατηρητής Σ’, που κινείται ως προς την αίθουσα με ταχύτητα V και ο άλλος Σ αντιστοιχεί στο σύστημα της αίθουσας.



Σχήμα 5: Μέτρηση του πλάτους της αίθουσας διδασκαλίας.

Ο χρόνος που χρειάζεται ο Σ’ να διανύσει την απόσταση απο την μιά άκρη της αίθουσας στην άλλη είναι Δt’ σύμφωνα με τον Σ’ και Δt για τον Σ. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχομε

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{15}$$

Επομένως, κατά τον Σ το φάρδος της αίθουσας είναι

$$L = V\Delta t \tag{16}$$

ενω ο Σ’ βρίσκει

$$L' = V\Delta t' = V\Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{17}$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας την $L = V\Delta t$ καταλήγομε

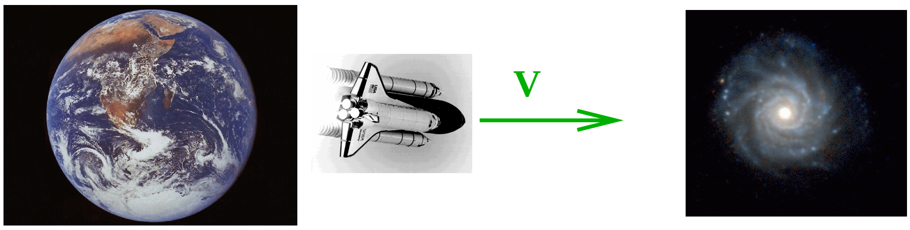
$$\boxed{L' = L\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{18}$$

’Αρα, ο παρατηρητής Σ’ που *κινείται ως προς την μετρούμενη απόσταση* μετράει *μικρότερο μήκος* από αυτό που μετράει ο Σ, στο σύστημα ηρεμίας της.

Χρησιμοποίησα το παράδειγμα της αίθουσας για να αποδείξω τον τύπο της **συστολής του μήκους**, αλλά προφανώς τα ιδια ισχύουν για οποιοδήποτε μήκος (ακίνητο στην αίθουσα) και να μέτραγαν οι δύο αδρανειακοί παρατηρητές.

Εφαρμογή 1: Στο ταξίδι για την Ανδρομέδα, ο ταξιδιώτης γνωρίζει τώρα οτι η απόσταση που έχει να διανύσει ΔΕΝ είναι τα L=2000000 έτη φωτός, πού έχομε μετρήσει από τη Γη, αλλά $L' = L(1 - V^2/c^2)^{1/2}$. Διαλέγοντας την ταχύτητά του αρκετά κοντά στο c μπορεί να ταξιδέψει σε όποιο μακρινό γαλαξία θελήσει, και σε οσο σύντομο χρονικό διάστημα αποφασίσει! Στο όριο που η ταχύτητά του γίνει c, όλες οι αποστάσεις στη κατεύθυνση της κίνησής του μηδενίζονται!!

ΑΣΚΗΣΗ: Με τί ταχύτητα (ως προς τη Γη) πρέπει να ταξιδέψει κανείς ώστε να φτάσει στην Ανδρομέδα σε 1 έτος;



Σχήμα 6: Κοσμοναύτης στο δρόμο για την Ανδρομέδα.

ΑΣΚΗΣΗ: *Το μ-μεσόνιο στο σύστημα ηρεμίας του*. 'Ενα μ-μεσόνιο παράχθηκε από τη διάσπαση ενός π-μεσονίου σε ύψος h=10000 m απο την επιφάνεια του εδάφους (όπως μετριέται απο γήινο παρατηρητή) και κατευθύνεται προς τη Γη με ταχύτητα V=0.999 c. Πόση απόσταση στο σύστημα του μεσονίου πρέπει να διανύσει μέχρι να φτάσει στη Γη; Θα προφτάσει να πέσει στη Γη προτού διασπαστεί σε $\tau \sim 2.0 \times 10^{-6} sec$; Συμφωνεί με το παραπάνω συμπέρασμα ένας γήινος παρατηρητής;

Σχήμα 7: μ-μεσόνιο πέφτει προς τη Γη.

5.1 Τα σχετικιστικά φαινόμενα στην καθημερινή μας εμπειρία

Βρισκόμαστε λοιπόν μπροστά σε μια πραγματικότητα πολύ διαφορετική από αυτήν που έχομε συνηθίσει. Σε αντίθεση με την καθημερινή μας εμπειρία, που έχει αποτυπωθεί με μεγάλη ακρίβεια στους νόμους του Νεύτωνα, οι χρονικές και οι χωρικές αποστάσεις δύο γεγονότων εξαρτώνται απο τον παρατηρητή, που τις μετράει!!

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο χρόνος κυλάει πιό αργά για τους ταξιδιώτες ενός αεροπλάνου σε σχέση με αυτούς, που μένουν "ακίνητοι" στη Γη. 'Ολοι μας όμως έχομε επανηλειμένα ταξιδέψει με αεροπλάνο χωρίς να παρατηρήσομε κάποια καθυστέρηση στη γήρανσή μας!

Αυτό που συμβαίνει είναι οτι υπάρχει καθυστέρηση στη γήρανσή μας, αλλά είναι τόσο μικρή που δεν γίνεται αντιληπτή. Πράγματι, σύμφωνα με τους τύπους της διαστολής του χρόνου και της συστολής του μήκους οι αποκλίσεις απο τις σχέσεις Δt'=Δt και L'=L της Νευτώνειας μηχανικής είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας του $1-V^2/c^2$. Ο ταξιδιώτης ενος αεροπλάνου κινείται ως προς εμάς στη Γη με ταχύτητα ας πούμε $V \sim 1080km/h = 0.3km/sec$. Οπότε στην περίπτωση αυτή

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{1-10^{-12}} \sim 1-\frac{1}{2}\times 10^{-12} \tag{19}$$

Επομένως, ένα ταξίδι που για τον ταξιδιώτη στο αεροπλάνο διαρκεί χρόνο T, ο παρατηρητής στη Γη θα παρατηρήσει

$$T' = \frac{T}{1-\frac{1}{2}\times 10^{-12}} \sim T\times(1+0.5\times 10^{-12}) \tag{20}$$

μεγαλύτερο από τον T κατά

$$\delta T \sim T \times 10^{-12}. \tag{21}$$

Κατά συνέπεια, για να διαφέρει στο τέλος του ταξιδιού η ηλικία των δύο παρατηρητών κατά δT μόλις 1 sec, το ταξίδι πρέπει να διαρκέσει $T \sim 10^5$έτη. Αν επομένως θέλει κάποιος να επαληθεύσει ή να απορρίψει την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, θα πρέπει είτε να μελετήσει σωμάτια και συστήματα, που κινούνται με ταχύτητες πολύ πολύ μεγαλύτερες από αυτήν του αεροπλάνου, είτε, αν επιμένει στα γνωστά μας μέσα μετακίνησης θα πρέπει να επιννοήσει πειράματα πολύ μεγαλύτερης ακρίβειας από αυτήν της καθημερινής εμπειρίας.

'Ολα τα πειράματα, που έχουν ήδη γίνει μέχρι σήμερα έχουν οδηγήσει σε αποτελέσματα, που συμφωνούν απολύτως με τις παραπάνω προβλέψεις της θεωρίας [7].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθούν οι παρακάτω παραστάσεις με την ακρίβεια που αναφέρεται: (α) 0.99^2 με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου. (β) 0.999999^4 με ακρίβεια έκτου δεκαδικού ψηφίου. (γ) $\sqrt{1-0.001^2}$ με ακρίβεια έβδομου δεκαδικού ψηφίου.

2. Δέσμη με $N_0 = 10^{20}$ μιόνια κινείται με ταχύτητα $0.999999c$. (α) Πόσα μιόνια εκτιμάτε οτι θα έχουν απομείνει στη δέσμη μετά από $t = 10^{-2}sec$; (β) Τί απόσταση θα έχουν διανύσει μέχρι εκείνη τη στιγμή;

Ο χρόνος ζωής του μιονίου είναι $\tau_\mu \simeq 2\times 10^{-6}sec$.

3. Δοχείο όγκου V_0 (στο σύστημα ηρεμίας του) και ακανόνιστου σχήματος κινείται με ταχύτητα v ως προς τον παρατηρητή Σ. (α) Ποιός είναι ο όγκος V που μετράει ο Σ; (β) Αν n_0 είναι η πυκνότητα σωματιδίων του αερίου μέσα στο δοχείο στο σύστημα ηρεμίας του, τί πυκνότητα n μετράει ο Σ;

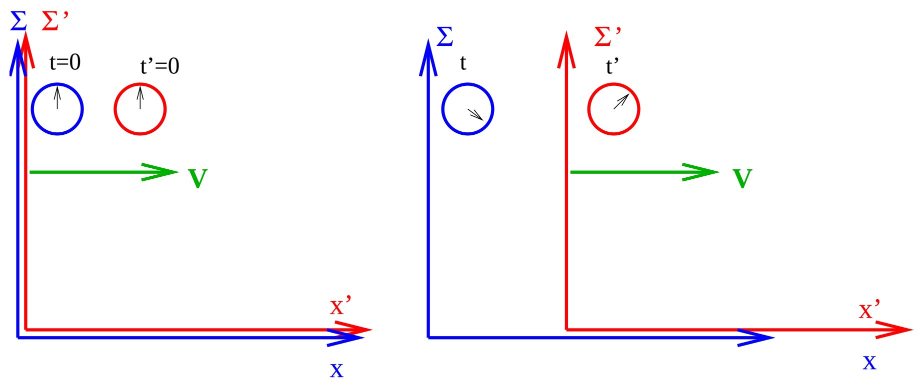
[7] Δείτε για παράδειγμα τις εργασίες....

4. Ταξιδιώτης σε διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα v=0.9999999999c προς μακρινό γαλαξία, που απέχει από τη Γη $L = 2 \times 10^6$ έτη φωτός. (α) Πόση απόσταση αντιλαμβάνεται ο ταξιδιώτης οτι έχει να διανύσει μέχρι να φτάσει στο γαλαξία αυτόν; (β) Πόσο χρόνο υπολογίζει οτι θα χρειαστεί αν διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του; (γ) Πόσο χρόνο θα διαρκέσει το ταξίδι κατά τον γήϊνο παρατηρητή;

5. Το Ρέθυμνο απέχει από το Ηράκλειο 75 km. Φανταστείτε οτι η ταχύτητα του φωτός ήτανε 150 km/h. Πόση ώρα θα κάνατε να φτάσετε με το αυτοκίνητό σας στο Ρέθυμνο, αν ταξιδεύατε με σταθερή ταχύτητα 75 km/h;

6 Ο μετασχηματισμός Lorentz

Θεωρείστε δύο παρατηρητές Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα V, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 8: Οι Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα V.

Οι Σ και Σ' προκειμένου να περιγράψουν τα διάφορα γεγονότα, έχουν ορίσει ο καθένας ένα σύστημα συντεταγμένων για τον προσδιορισμό της θέσης στο χώρο και είναι εφοδιασμένοι με ιδανικά ρολόγια για να περιγράφουν την χρονική στιγμή που έλαβε χώρα το κάθε γεγονός. 'Ετσι, ο Σ χαρακτηρίζει τα διάφορα γεγονότα με τις χωροχρονικές συντεταγμένες τους (x, y, z, t) και ο Σ' με τις (x', y', z', t'). Κάποιο γεγονός A θα χαρακτηρίζεται με τις συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A, t_A) από τον Σ και με τις (x'_A, y'_A, z'_A, t'_A) απο τον Σ'.

Για να μπορούν οι δύο παρατηρητές να επικοινωνήσουν και να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους, πρέπει να γνωρίζουν πώς οι συντεταγμένες (x', y', z', t') ενός οποιουδήποτε γεγονότος σχετίζονται με τις (x, y, z, t).

Οι σχέσεις αυτές, που συνδέουν δύο αδρανειακούς παρατηρητές σε σχετική κίνηση ονομάζονται **μετασχηματισμός Lorentz** και με την εξαγωγή τους θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να ορίσω τις κατευθύνσεις των αξόνων x και x' να συμπίπτουν με την κατεύθυνση της σχετικής ταχύτητας των Σ και Σ'. Μπορώ, επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας, να φροντίσω ώστε τη στιγμή που ο παρατηρητής Σ' περνάει μπροστά από τον Σ, και συμπίπτουν οι αρχές των αξόνων τους να ρυθμίσουν τα ρολόγια τους να δείχνουν t=0=t'.

'Ετσι, η "σύμπτωση των αρχών των αξόνων" αποτελεί ένα γεγονός που χαρακτηρίζεται απο τις συντεταγμένες

$$x = y = z = 0 = t \quad , \quad x' = y' = z' = 0 = t' \tag{22}$$

κατά τους παρατηρητές Σ και Σ' αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων μας υποδεικνύουν να αναζητήσομε μετασχηματισμό των συντεταγμένων ανάμεσα στα Σ και Σ' που να είναι γραμμικός, και που για να ικανοποιεί την (22) θα γράφεται στη μορφή [8]

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 t \quad , \quad t' = \alpha_3 x + \alpha_4 t \tag{23}$$

με τις παραμέτρους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, που μένει να προσδιοριστούν, να εξαρτώνται μόνο απο την σχετική ταχύτητα V των Σ και Σ'.

Οι παράμετροι αυτές υπολογίζονται ως εξής:

[8]Απο τη συμμετρία και μόνο του σκηνικού και της σχετικής κίνησης των δύο συστημάτων μπορεί εύκολα να συμπεράνει κανείς οτι οι συντεταγμένες y και z των γεγονότων είναι οι ίδιες για τους Σ και Σ'. 'Αρα θα ασχοληθώ με τις x και t.

(α) Μάθαμε παραπάνω, οτι αν έχω δύο γεγονότα A και B που συμβαίνουν στην ίδια θέση, ας πούμε ως προς τον παρατηρητή Σ, δηλαδή $x_A = x_B$, τότε οι χρονικές αποστάσεις $t'_A - t'_B$ και $t_A - t_B$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$t'_A - t'_B = \frac{t_A - t_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{24}$$

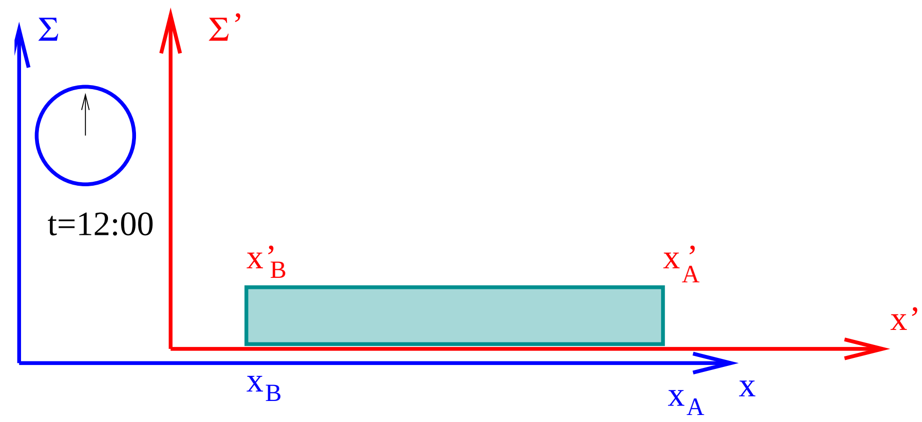
Εφαρμόζω την δεύτερη απο τις (23) για τα δύο αυτά γεγονότα και παίρνω:

$$t'_A = \alpha_3 x_A + \alpha_4 t_A \quad , \quad t'_B = \alpha_3 x_B + \alpha_4 t_B \tag{25}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και συγκρίνοντας με την (24) συμπεραίνω οτι

$$\alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{26}$$

(β) Αντίστοιχα, ας θεωρήσομε τη μέτρηση στο σύστημα Σ του μήκους μιας ράβδου *ακίνητης ως προς τον Σ'*, που κατά συνέπεια κινείται ως προς τον Σ με ταχύτητα V. Η κατάσταση περιγράφεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Η μέτρηση του μήκους κινούμενης ράβδου.

Η μέτρηση γίνεται ως εξής: Τοποθετούμε παρατηρητές ακίνητους κατά μήκος του άξονα των x στο Σ με τα ρολόγια τους συγχρονισμένα, και τους δίνομε την εξής εντολή: Σε κάποια χρονική στιγμή, ας πούμε όταν τα ρολόγια τους δείχνουν 12:00, να σηκώσουν τα χέρια τους εκείνοι οι δύο που έχουν μπροστά τους τα δύο άκρα της ράβδου. Αν x_A και x_B είναι οι συντεταγμένες των δύο αυτών, τότε το μήκος της ράβδου στο σύστημα αναφοράς Σ θα είναι

$$L = x_A - x_B \tag{27}$$

Εφαρμόζοντας την πρώτη από τις (23) στα γεγονότα "σύμπτωση του άκρου A με τον παρατηρητή στο A" και "σύμπτωση του άκρου B με τον παρατηρητή στο B" παίρνομε

$$x'_A = \alpha_1 x + \alpha_2 t_A \quad , \quad x'_B = \alpha_1 x + \alpha_2 t_B \tag{28}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη, χρησιμοποιούμε την $t_A = t_B$ και βρίσκομε

$$x'_A - x'_B = \alpha_1 (x_A - x_B) \tag{29}$$

Η συστολή του μήκους που μάθαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο μας λέει οτι

$$x_A - x_B = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (x'_A - x'_B) \tag{30}$$

απ’ όπου καταλήγομε στην

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{31}$$

(γ) Σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα, η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια ως προς κάθε αδρανειακό παρατηρητή. Φανταστείτε οτι κατά τη στιγμή της σύμπτωσης των αρχών των αξόνων των δύο συστημάτων άναψε μια φωτεινή πηγή τοποθετημένη στην κοινή αρχή των αξόνων. Το προς τα δεξιά διαδιδόμενο μέτωπο του κύματος που εξέπεμψε η πηγή αυτή ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$x = ct \ , \quad x' = ct' \tag{32}$$

ως προς τα συστήματα Σ και Σ’, αντίστοιχα. Μ’άλλα λόγια, αν τα x και t ικανοποιούν την $x = ct$, τα x’ και t’ που υπολογίζονται από την (23) πρέπει να ικανοποιούν την $x' = ct'$.

Παίρνομε με αυτό το τρόπο τη σχέση

$$\frac{\alpha_1 c + \alpha_2}{\alpha_3 c + \alpha_4} = c \tag{33}$$

(δ) Τέλος, η αρχή των αξόνων (x’=0) του συστήματος Σ’ όπως την παρατηρεί ο Σ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x = Vt \tag{34}$$

’Αρα, για κάθε t ισχύει $0 = \alpha_1 x + \alpha_2 t = (\alpha_1 V + \alpha_2)t$, και επομένως οι παράμετροι ικανοποιούν και τη σχέση

$$\alpha_1 V + \alpha_2 = 0 \tag{35}$$

Απο τις (26), (31), (33) και (35) παίρνομε

$$\boxed{t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ y' = y \ , \ z' = z} \tag{36}$$

Αυτός είναι ο **μετασχηματισμός Lorentz** που συνδέει τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς Σ και Σ’ του Σχήματος 8.

Η γραμμικότητα του μετασχηματισμού αυτού συνεπάγεται την ίδια σχέση για τις διαφορές των χωροχρονικών συντεταγμένων δύο γεγονότων ως προς τους Σ και Σ’, δηλαδή

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \Delta y' = \Delta y \ , \ \Delta z' = \Delta z} \tag{37}$$

Ισοδύναμα, κάνοντας χρήση του κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων, εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε οτι ο μετασχηματισμός Lorentz (36) κατά την κατεύθυνση x, που περιοριστήκαμε εδώ, γράφεται και στη μορφή

$$\boxed{\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \Lambda(V) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}} \tag{38}$$

με τον πίνακα Lorentz $\Lambda(V)$

$$\boxed{\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & -\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{39}$$

όπου

$$\beta(V) \equiv \frac{V}{c}\,, \quad \gamma(V) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} \tag{40}$$

Η γενίκευση των παραπάνω για σχετική κίνηση σε τυχούσα κατεύθυνση και γενικό σχετικό προσανατολισμό των δύο συστημάτων είναι εύκολη αλλά όχι απαραίτητη για τις ανάγκες του μαθήματος.

Σχόλιο 1: **Ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου** προκύπτει ως το όριο του μετασχηματισμού Lorentz για $V/c \to 0$. Πράγματι, στο όριο αυτό ο μετασχηματισμός (36) ανάγεται στο μετασχηματισμό Γαλιλαίου

$$x' = x - Vt\ , \ \ t' = t\ , \ \ y' = y\ , \ \ z' = z\,. \tag{41}$$

Η Νευτώνεια μηχανική περιγράφει ικανοποιητικά τα φαινόμενα στο όριο των μικρών (ως προς την ταχύτητα του φωτός) ταχυτήτων.

Σχόλιο 2: Είναι σημαντικό να αναφερθεί εδώ οτι με τον μετασχηματισμό Lorentz (36) να συνδέει διαφορετικούς αδρανειακούς παρατηρητές, οι νόμοι του Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού είναι οι ίδιοι ως προς όλους αυτούς τους παρατηρητές.

Σχόλιο 3: Κύκλος ακτίνας R (στο σύστημα ηρεμίας του) κινείται με ταχύτητα V ως προς παρατηρητή Σ. Να δείξετε ότι ο Σ βλέπει αντί για κύκλο έλλειψη με μικρό ημιάξονα $R\sqrt{1-V^2/c^2}$ στη κατεύθυνση της κίνησης και μεγάλο ημιάξονα R κάθετα στη σχετική ταχύτητα.
(Υπόδειξη: Στο σύστημα ηρεμίας ο κύκλος είναι $x^2 + y^2 = R^2$. Συναρτήσει των συντεταγμένων του Σ αυτός γράφεται $(x' + Vt')^2/(1-V^2/c^2) + y'^2 = R^2$. Τη στιγμή t'=0 που οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν, η εξίσωση αυτή γράφεται: $x'^2/(R^2(1-V^2/c^2)) + y'^2/R^2 = 1$, δηλαδή έλλειψη μικρό και μεγάλο ημιάξονα $R\sqrt{1-V^2/c^2}$ και R αντίστοιχα.)

Πώς καταλαβαίνει κανείς τη συστολή του μήκους μιάς ράβδου; Ας θεωρήσουμε τη ράβδο σαν μιά σειρά από σφαιρικά άτομα το ένα δίπλα στο άλλο. Το μήκος της ράβδου μικραίνει όταν κινείται διότι κάθε άτομό της συμπιέζεται στη κατεύθυνση της κίνησης όπως ο κύκλος του Σχολίου 2 κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-V^2/c^2}$. Το τελευταίο συμβαίνει διότι οι νόμοι που σχετίζονται με τη δομή των ατόμων είναι, όπως και όλοι οι Νόμοι της Φύσης, αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Αυτό σημαίνει ότι αν το "περίγραμμα" ενός ατόμου δίνεται απο μία σχέση της μορφής $f(x, y) = 0$ στο σύστημα ηρεμίας, θα είναι η κατά Lorentz μετασχηματισμένη $f(x(x', y'), y(x', y')) = 0$ στο κινούμενο.

**ΑΣΚΗΣΗ: Δύο διαστημόπλοια Α και Β βρίσκονται το ένα πίσω από το άλλο και σε ίση απόσταση από τρίτο Γ. Τα Α και Β συνδέονται με ένα τεντωμένο εύθραυστο νήμα. Κάποια στιγμή ο Γ στέλνει ένα σήμα και τα Α και Β ανάβουν τις μηχανές τους και αρχίζουν να επιταχύνονται απαλά και με το ίδιο ακριβώς πρόγραμμα ταξιδιού, που τους δίνει σε κάθε χρονική στιγμή την ίδια ακριβώς επιτάχυνση. Ετσι η ταχύτητά τους να αυξάνεται σιγά-σιγά και με τον ίδιο τρόπο. Ζητείται να αποφασίσετε κατά πόσον το νήμα θα σπάσει κάποια στιγμή ή όχι [7].

Σχόλιο 4: Χρησιμοποιώντας τους τύπους (37) εύκολα επαληθεύετε ότι

$$\boxed{c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} \tag{42}$$

δηλαδή, η ποσότητα

$$\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{43}$$

που ονομάζεται **χωροχρονική απόσταση** των δύο γεγονότων με διαφορές χωροχρονικών συντεταγμένων $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ είναι **αναλλοίωτη** ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Αυτό ισχύει για οποιονδήποτε μετασχηματισμό Lorentz. 'Οχι μόνο για αυτούς που έχουν σχετική ταχύτητα στην κατεύθυνση του άξονα των x [9].

*ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι ο μετασχηματισμός (37) είναι ο πιό γενικός μετασχηματισμός που αφήνει την ποσότητα $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ αναλλοίωτη.

Σχόλιο 5: Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού (36), δηλαδή οι σχέσεις που μας δίνουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος στο σύστημα Σ απο αυτές στο σύστημα Σ', υπολογίζεται επιλύοντας τις (36) ως προς x, t συναρτήσει των x' ,t'. Θα βρείτε

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ y = y' \ , \ \ z = z' \tag{44}$$

'Ενας άλλος τρόπος να αποδείξει κανείς τις σχέσεις αυτές είναι να σκεφτεί οτι αν για τον παρατηρητή Σ' ο Σ κινείται με ταχύτητα V προς τα *αριστερά* στο Σχήμα 1, ο Σ βλεπει τον Σ' να κινείται με ταχύτητα V προς τα *δεξιά*. 'Αρα παίρνομε τον μετασχηματισμό από το σύστημα Σ' στο Σ αντικαθιστώντας το V στις (36) με $-V$.

Αλλοιώς, μπορεί να σκεφτεί κανείς οτι γενικά, ο αντίστροφος ενός μετασχηματισμού είναι ένας άλλος μετασχηματισμός που αν συνδυαστεί με τον αρχικό, μας οδηγεί στον ταυτοτικό μετασχηματισμό, δηλαδή σε καθόλου αλλαγή συστήματος. Το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού Lorentz με ταχύτητα V εξουδετερώνεται από άλλον με ταχύτητα $-V$.

Τέλος, για όσους προτιμάνε να σκέφτονται αλγεβρικά, απλά ας παρατηρήσουν οτι

$$\Lambda(V)\Lambda(-V) = \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \Lambda(V)^{-1} = \Lambda(-V) \tag{45}$$

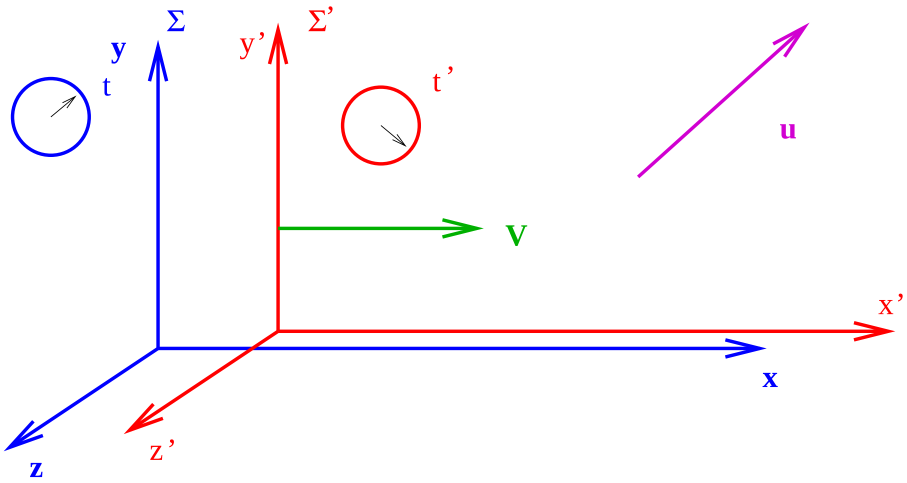
όπου **1** συμβολίζει τον πίνακα μονάδα.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ. Στις σημειώσεις αυτές διαλέξαμε να παρουσιάσομε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με την βοήθεια απλών νοητικών πειραμάτων της μηχανικής, με τρένα, ράβδους και διαστημόπλοια. Ισοδύναμα, και πιό κοντά στο πώς έγιναν τα πράγματα ιστορικά, μπορεί κανείς να ξεκινήσει με την παρατήρηση οτι η θεωρία του Maxwell για την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και όχι Γαλιλαίου. Αν επομένως οι νόμοι της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο κενό είναι οι ίδιοι ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, τότε πρέπει ο μετασχηματισμός που συνδέει δύο αδρανειακούς παρατηρητές να είναι ο μετασχηματισμός Lorentz. Η μηχανική του Νεύτωνα όμως δεν είναι αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμό Lorentz. Επομένως, ο μόνος τρόπος να ικανοποιήσομε το αξίωμα της σχετικότητας, σύμφωνα με το οποίο όλοι οι νόμοι της Φύσης είναι οι ίδιοι ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, είναι να αναδιατυπώσομε κατάλληλα τους νόμους της μηχανικής. Αυτό ακριβώς είναι που θα κάνουμε στη συνέχεια.

[9] Η δήλωση αυτή έχει το εξής ανάλογο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο: Η απόσταση $\Delta s_E^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ δύο σημείων στο χώρο είναι αναλλοίωτη ως προς τις στροφές. Οι μετασχηματισμοί Lorentz στο χωρόχρονο είναι το ανάλογο των στροφών στον Ευκλείδειο χώρο. Οι δύο αυτές ομάδες μετασχηματισμών αφήνουν αναλλοίωτη την αντίστοιχη απόσταση.

7 Σύνθεση ταχυτήτων

Ας πάρουμε τώρα ένα τρένο (Σ') να κινείται με ταχύτητα V ως προς τη Γη (Σ). Οι παρατηρητές Σ και Σ' παρατηρούν την κίνηση κάποιου σώματος, όπως δείχνει το παρακάτω Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Οι Σ και Σ' παρατηρούν σώμα κινούμενο στο χώρο.

Το ερώτημα που θα απαντήσομε στο κεφάλαιο αυτό είναι: *'Αν (u_x, u_y, u_z) είναι οι συντεταγμένες της ταχύτητας του σώματος αυτού σύμφωνα με τον Σ, ποιές θα είναι οι (u'_x, u'_y, u'_z) που θα μετρήσει ο Σ';*

'Εστω μια απειροστά μικρή μεταβολή στη θέση του σώματος που λαμβάνει χώρα σε ένα απειροστά μικρό χρονικό διάστημα Δt. Οι μεταβολές αυτές είναι $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ κατά τον Σ, και αντίστοιχα $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$, που υπολογίζονται απο τις (36), κατά τον Σ'.

Επομένως, οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος ως προς τον Σ' θα είναι

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - V\Delta x/c^2} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \tag{46}$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\frac{u_y}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \tag{47}$$

και

$$u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\frac{u_z}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \tag{48}$$

Σχόλιο 1: Οι νέοι τύποι σύνθεσης ταχυτήτων που μόλις αποδείξαμε ανάγονται στους πιό γνώριμούς μας από τη Νευτώνεια μηχανική στο όριο των μικρών ταχυτήτων. Πράγματι για V/c και $|\mathbf{u}|/c$ πολύ μικρότερα από τη μονάδα, παίρνομε

$$u'_x \to u_x - V \ , \quad u'_y \to u_y \ , \quad u'_z \to u_z \tag{49}$$

Σχόλιο 2: Οι παραπάνω τύποι σύνθεσης ταχυτήτων συνεπάγονται οτι το φώς κινείται με την ίδια ταχύτητα c ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

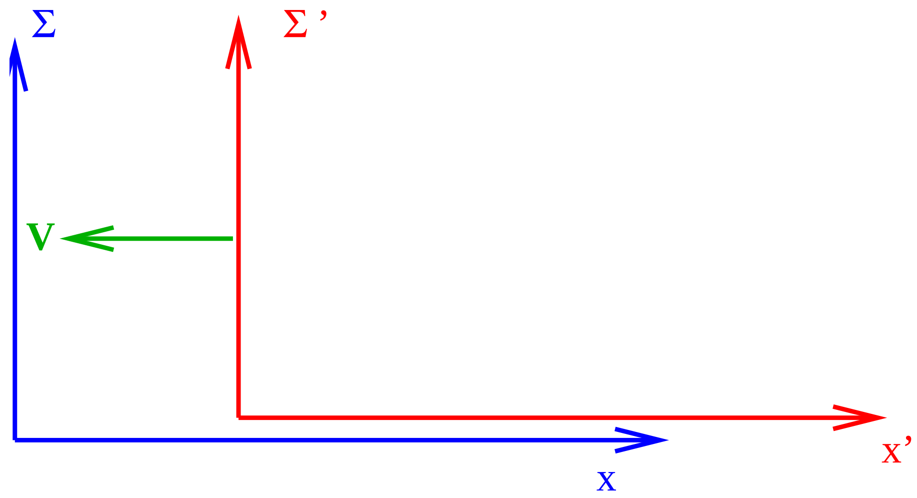
Πράγματι, αν το σώμα που μελετάμε παραπάνω είναι ένα φωτόνιο που κινείται στην κατεύθυνση x, φυσικά με ταχύτητα $u_x = c$, η ταχύτητά του ως προς τον Σ' θα είναι

$$u'_x = \frac{c - V}{1 - V/c} = c \tag{50}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, αφού η ιδιότητα αυτή του φωτός χρησιμοποιήθηκε ήδη στην απόδειξη του μετασχηματισμού Lorentz.

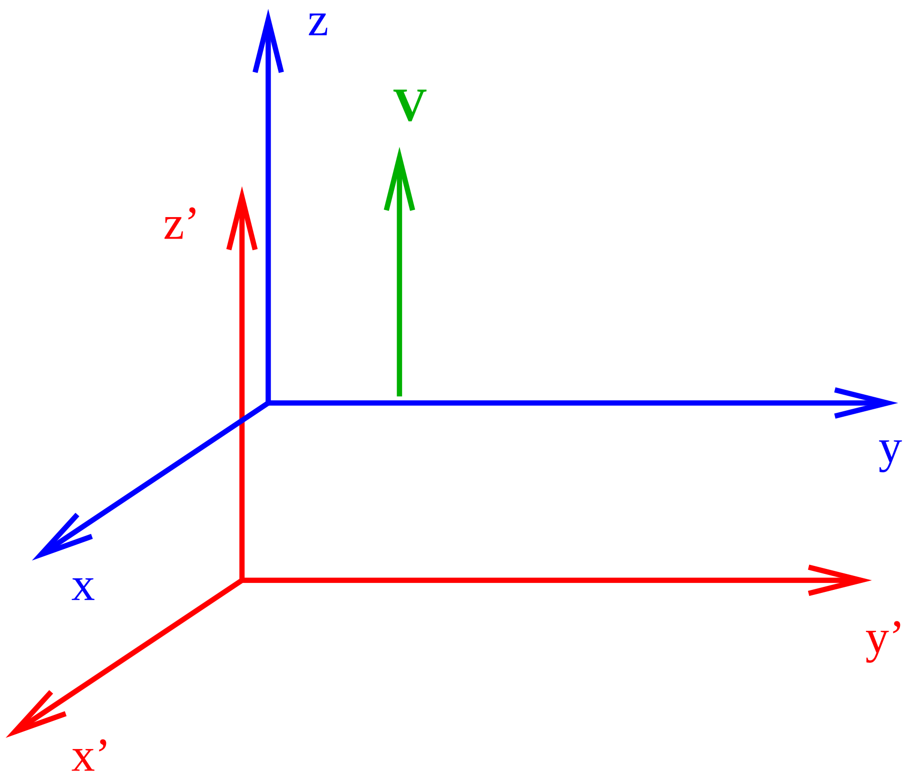
Σχόλιο 3: Τα σχόλια 1 και 2 που μόλις κάναμε είναι πολύ χρήσιμα ως μνημονικός κανόνας, προς αποφυγή λαθών στον τύπο σύνθεσης ταχυτήτων, που πρέπει κανείς να χρησιμοποιήσει σε διάφορες εφαρμογές.

ΑΣΚΗΣΗ: Να γράψετε το μετασχηματισμό Lorentz από το σύστημα Σ στο Σ' του σχήματος που ακολουθεί.



Σχήμα 11.

ΑΣΚΗΣΗ: Ομοίως για την περίπτωση του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 12.

7.1 Μετασχηματισμός της επιτάχυνσης

Κατ' αναλογίαν με τον μετασχηματισμό της ταχύτητας που αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορεί κανείς να υπολογίσει την επιτάχυνση (a'_x, a'_y, a'_z) σώματος ως προς το σύστημα Σ, συναρτήσει της επιτάχυνσης (a_x, a_y, a_z) του σώματος αυτού ως προς το Σ και της σχετικής ταχύτητας V των δύο συστημάτων.

Χρησιμοποιείστε την (46) και επαληθεύσετε οτι για το σκηνικό του Σχήματος 8 ισχύει:

$$a'_x \equiv \frac{dv'_x}{dt'} = a_x \frac{\left(1 - V^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1 - V v_x/c^2\right)^3} \tag{51}$$

8 Η ορμή σώματος

Στην εισαγωγή στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πειστήκαμε μέσα από μερικά παραδείγματα οτι οι τύποι του Νεύτωνα για την ενέργεια και την ορμή ελεύθερου σώματος δεν είναι σωστοί. Ποιοί όμως είναι οι σωστοί; Η διατύπωσή τους είναι το αντικείμενο των δύο παραγράφων που ακολουθούν. Στην πρώτη υποπαράγραφο θα αποδειχθεί χωρίς τη χρήση ιδιοτήτων του φωτός, οτι ο τύπος της ορμής $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ ενός σώματος δεν είναι σωστός. Στην δεύτερη, θα δοθεί ο σωστός τύπος της ορμής και θα διατυπωθεί ο Νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση σώματος υπό την επίδραση τυχούσης δύναμης.

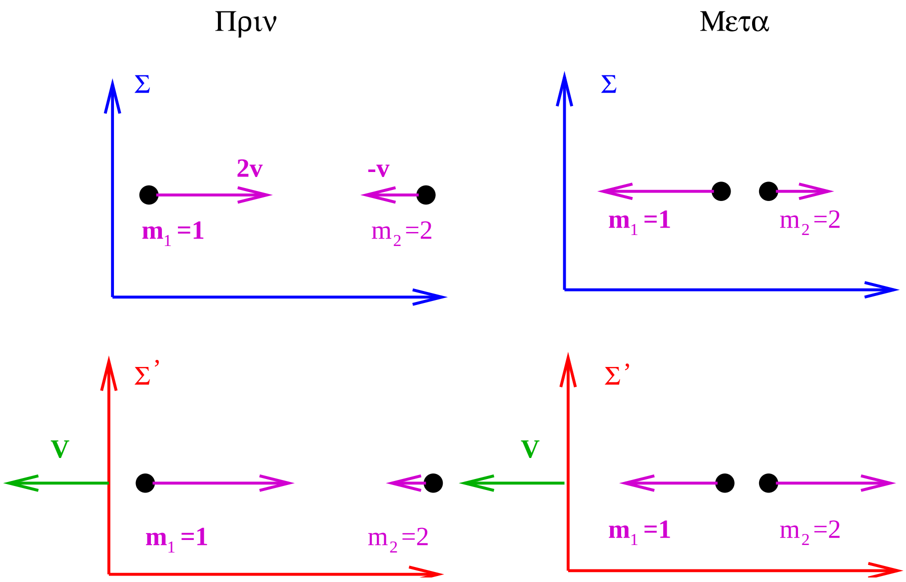
8.1 'Ενα απλό πείραμα.

'Οπως έχομε αναφέρει θεωρούμε βασική και αδιαφιλονίκητη την υπόθεση της ομοιογένειας του *κενού* χώρου. Κατά συνέπεια πιστεύουμε οτι σε κάθε κλειστό σύστημα υπάρχει μια διανυσματική ποσότητα, που ονομάζομε ορμή, και η οποία είναι σταθερά της κίνησης του συστήματος αυτού. Μάλιστα, σύμφωνα με το αξίωμα της σχετικότητας που αποδεχθήκαμε απο τη αρχή, ο νόμος της διατήρησης της ορμής θα πρέπει να ισχύει ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

Σύμφωανα με τη Νευτώνεια μηχανική η ορμή συστήματος σωμάτων με μάζες m_a και ταχύτητες $\mathbf{v}_a$ δίδεται από τη σχέση

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \,. \tag{52}$$

Με την εις άτοπον απαγωγή θα αποδείξουμε τώρα ότι ο τύπος αυτός δεν είναι σωστός. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι είναι και ας θεωρήσουμε το πείραμα σκέδασης του Σχήματος 13, όπως περιγράφεται στο σύστημα αναφοράς Σ.



Σχήμα 13: 'Ενα πείραμα σκέδασης. Η κατάσταση πριν και μετα τη σκέδαση.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο του Νεύτωνα βρίσκουμε οτι η ολική ορμή τόσο πριν όσο και μετά τη σκέδαση είναι μηδέν. Το πείραμα του Σχήματος 13 είναι συμβιβαστό με το νόμο διατήρησης της ορμής.

Ας δούμε όμως τί θα συμπεράνει για την ίδια σκέδαση παρατηρητής Σ', που κινείται ως προς τον Σ με σχετική ταχύτητα V, όπως δείχνει επίσης το Σχήμα 13. Ως προς αυτόν οι ταχύτητες u_1 και u_2 των δύο σωμάτων πριν τη σκέδαση υπολογίζονται με βάση τον τύπο σύνθεσης ταχυτήτων, που έχομε αποδείξει. Το αποτέλεσμα είναι:

$$u_1 = \frac{2v+V}{1+\frac{2vV}{c^2}}\ ,\quad u_2 = \frac{-v+V}{1-\frac{vV}{c^2}} \tag{53}$$

ενώ, αντίστοιχα οι ταχύτητες u'_1 και u'_2 μετά τη σκέδαση είναι

$$u'_1 = \frac{-2v+V}{1-\frac{2vV}{c^2}}\ ,\quad u'_2 = \frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}} \tag{54}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τον τύπο της ορμής για να υπολογίσομε την ολική ορμή πριν και μετά τη σκέδαση. Εύκολα πείθεται κανείς οτι η αρχική και η τελική ορμή του συστήματος είναι *διαφορετικές*. Πάρτε για παράδειγμα την περίπτωση που $v = V = c/4$. Θα βρείτε $P'_{initial} = 2c/3$, ενώ $P'_{final} = 78c/119$. 'Αρα, ως προς τον Σ' η Νευτώνεια ορμή δεν διατηρείται.

8.2 Η ορμή και η εξίσωση του Νεύτωνα.

Η σωστή έκφραση της ορμής σώματος μάζας Μ που κινείται με ταχύτητα **v** είναι

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{55}$$

Αντίστοιχα, η ορμή συστήματος σωμάτων με μάζες M_a και ταχύτητες $\mathbf{v}_a$, a=1,2,3,... είναι

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{M_a\mathbf{v}_a}{\sqrt{1-v_a^2/c^2}}} \tag{56}$$

Για την απόδειξη του τύπου (55) της ορμής παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη είτε στο Παράρτημα 2, είτε σε άλλα βιβλία όπως το Κεφάλαιο 12 του [5]. Εδώ θα θέλαμε να σημειώσουμε μια βασική της ιδιότητα. Οταν τα σώματα του υπό μελέτη συστήματος κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες αυτής του φωτός, τότε ο παραπάνω τύπος ανάγεται στην Νευτώνεια έκφραση (52).

Η εξίσωση κίνησης ελεύθερου σώματος ως προς οποιονδήποτε *αδρανειακό* παρατηρητή είναι

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0} \tag{57}$$

Σώμα υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης κινείται σε οποιοδήποτε *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς, σύμφωνα με την εξίσωση του Νεύτωνα

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}} \tag{58}$$

Τονίζω οτι οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης ισχύουν *μόνο σε αδρανειακά συστήματα* αναφοράς. Οπως έχουμε εξηγήσει, η (57) ορίζει τα συστήματα αυτά. Ενας μη αδρανειακός παρατηρητής δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει τις απλές αυτές εξισώσεις κίνησης. Για παράδειγμα, η εξίσωση κίνησης ενός ελεύθερου σώματος ως προς περιστρεφόμενο παρατηρητή έχει τη δύναμη Coriolis στο δεύτερο μέλος. Ως προς το μή αδρανειακό αυτό σύστημα η εξίσωση κίνησης του **ελεύθερου** σώματος είναι

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{coriolis}} + ... \tag{59}$$

9 Η ενέργεια σώματος - Ενέργεια ηρεμίας

Θα πάρουμε τώρα ένα σώμα, που είναι αρχικά ακίνητο στη θέση x_1 του άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Μιά μεταβαλλόμενη εν γένει δύναμη F(x) ασκείται πάνω του, πάντα στη κατεύθυνση x, υπο την επίδραση της οποίας το σώμα μετατοπίζεται πάνω στον άξονα των x [10]. Οταν το σώμα βρίσκεται στη θέση x_2 η ταχύτητά του είναι v.

Γνωρίζετε απο την μηχανική οτι το έργο $W(x_1, x_2)$, που καταναλώθηκε από την δύναμη πάνω στο σώμα κατά την μετατόπισή του από την θέση x_1 στην x_2, ή ισοδύναμα από την αρχική ταχύτητα μηδέν στην τελική v, ισούται προς την μεταβολή της ενέργειας του σώματος. Μάλιστα, αφού το σώμα ξεκίνησε από ηρεμία το έργο αυτό ισούται επίσης και με την κινητική ενέργεια, που απέκτησε αυτό τελικά.

Γράφουμε λοιπόν

$$W(x_1, x_2) = E_{final} - E_{initial} = K(v) \tag{60}$$

Γνωρίζετε ακόμα οτι το έργο της δύναμης $F(x)$ από την αρχική θέση στην τελική, δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp(x(t))}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx \\ &= \int_0^v \frac{dp}{dv}vdv = \int_0^v \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}vdv \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \\ &\equiv K(v) \end{aligned}$$

Σύμφωνα, επομένως, με την (60) η κινητική ενέργεια σώματος με μάζα m και ταχύτητα v δίδεται από τη σχέση

$$\boxed{K(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2} \tag{61}$$

ενώ η ολική ενέργεια σώματος με μάζα m και ταχύτητα v είναι

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{62}$$

Μερικά σημαντικά σχόλια έχουν τώρα σειρά: (1) Σε αντίθεση με αυτά που μάθατε στη Νευτώνεια μηχανική, ένα *ακίνητο σώμα με μάζα m* έχει ενέργεια

$$\boxed{E_0 = mc^2} \tag{63}$$

την οποία ονομάζομε για προφανείς λόγους **ενέργεια ηρεμίας του σώματος**.

(2) Χρησιμοποιώντας την (62) μπορείτε να γράψετε την ορμή (55) στη μοργή

$$\mathbf{p} = \frac{E\,\mathbf{v}}{c^2} \tag{64}$$

(3) Χρησιμοποιείστε τις εκφράσεις (62) και (55) της ενέργειας και της ορμής σώματος μάζας m, που αποδείξαμε παραπάνω, και επαληθεύσετε τη σχέση

$$\boxed{E^2 - c^2\mathbf{p}^2 = m^2c^4} \tag{65}$$

[10] Για απλότητα περιορίζουμε την κίνηση του σώματος στον άξονα x. Εύκολα γενικεύει κανείς τη συζήτηση σε τρισδιάστατες κινήσεις. Τα βασικά συμπεράσματα δεν αλλάζουν.

(4) **Σωμάτια με μηδενική μάζα.** Ποιά είναι η ενέργεια και η ορμή σωματίων με μάζα μηδέν, όπως τα φωτόνια, πιθανόν τα ελαφρύτερα νετρίνα (ν_e), ή τα βαρυτόνια;

Από την (75) συμπεραίνετε ότι για σωμάτια με μηδενική μάζα ισχύει

$$\boxed{E = |\mathbf{p}|c} \tag{66}$$

Συνδυάζοντας τη σχέση αυτή με την (64) προκύπτει ότι για τα σωμάτια αυτά ισχύει επίσης ότι

$$v = c\,. \tag{67}$$

Αρα, σωμάτια με μηδενική μάζα κινούνται υποχρεωτικά με την ταχύτητα του φωτός και η ενέργειά τους ισούται με το γινόμενο του μέτρου της ορμής επί c. Ετσι οι σχέσεις (62) και (55) για την ενέργεια και την ορμή αντίστοιχα σωματιδίου με μηδενική μάζα, οδηγούν σε απροσδιοριστία της μορφής 0/0. Η ενέργεια και η ορμή ξεχωριστά δεν υπολογίζονται από τις σχέσεις αυτές. Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας μας δίνει μόνο τη σχέση (66) ανάμεσα στις δύο αυτές ποσότητες. Αν γνωρίζομε την ενέργεια ενός φωτονίου, τότε από τον τύπο αυτό υπολογίζομε την ορμή του, και αντίστροφα [11].

Ειδικά για φωτόνιο ακτινοβολίας συχνότητας ν γνωρίζετε οτι έχει ενέργεια $E = h\nu$. Το μέτρο της ορμής αυτού του φωτονίου είναι

$$|\mathbf{p}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}\,. \tag{68}$$

(5) Για σώματα που κινούνται με μικρές ταχύτητες ο τύπος της ενέργειας του Νεύτωνα αποτελεί καλή προσέγγιση της κινητικής ενέργειας $K(v)$. Πράγματι, για $v/c \ll 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} K(v) &= mc^2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\Big) \\ &\simeq mc^2\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + ... - 1\Big) \\ &\simeq \frac{1}{2}mv^2 - \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + ... \end{aligned}$$

ήτοι, η κινητική ενέργεια δίνεται από τη Νευτώνεια έκφραση, συμπληρωμένη με την κύρια και τις ανώτερες σχετικιστικές διορθώσεις με τη μορφή δυναμοσειράς ως προς τη μικρή παράμετρο $v/c \ll 1$.

Μονάδες μάζας - ορμής. Πολύ συχνά και ιδιαίτερα στην Πυρηνική Φυσική και στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων οι μάζες μετρώνται σε μονάδες (Ενέργεια)/c^2. 'Ετσι γράφουμε

$$m_e \simeq 0.511 MeV/c^2\ ,\ \ m_p \simeq 938.3 MeV/c^2\ ,\ \ m_n \simeq 939.6 MeV/c^2 \tag{69}$$

για τις μάζες του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου και του νετρονίου, αντίστοιχα.

Επίσης, η ορμή μετράται συχνά σε μονάδες (Ενέργεια)/c.

Σας υπενθυμίζω οτι $1eV = 1.6 \times 10^{-12} erg = 1.6 \times 10^{-19} Joule$. $1MeV = 10^6 eV$, $1GeV = 10^9 eV$ κ.ο.κ.

[11] 'Οπως έχομε εξηγήσει, η Νευτώνεια μηχανική είναι βασισμένη στην υπόθεση ύπαρξης παγκόσμιου χρόνου, κοινού σε όλους τους παρατηρητές στο Σύμπαν. Αυτό προυποθέτει την δυνατότητα μεταβίβασης πληροφορίας με άπειρη ταχύτητα. Αν υποθέσομε οτι ένα σωμάτιο με μάζα μηδέν, έχει αναγκαστικά άπειρη ταχύτητα, τότε οι τύποι του Νεύτωνα για την ενέργεια και την ορμή ενός τέτοιου σωματιδίου θα οδηγούσαν σε απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot \infty$ για τις δύο αυτές ποσότητες. Ομως, σε αντίθεση με τον τύπο (75), η σχέση που συνδέει την ενέργεια με την ορμή στην Νευτώνεια μηχανική $E = p^2/2m$ *δεν* είναι καλά ωρισμένη για $m \to 0$. O,τι και να προσπαθήσει κανείς στα πλαίσια της Νευτώνειας μηχανικής για σωμάτια με μηδενική μάζα, δεν πρόκειται να καταλήξει σε εκφράσεις ενέργειας και ορμής συμβιβαστές με το πείραμα. Ο τύπος (66) δεν έχει ανάλογο στην μη σχετικιστική μηχανική.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα $v = 0.85c$. Πόση είναι η ενέργεια και πόση η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου αυτού;

Απάντηση:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{0.511}{\sqrt{1 - 0.85^2}} MeV = 0.97 MeV\ , \quad K = E - mc^2 = 0.459 MeV \tag{70}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Πρωτόνιο έχει ενέργεια $E = 3m_pc^2$. (α) Η ενέργεια ηρεμίας του είναι $m_pc^2 = 938.3MeV$. (β) Η ταχύτητά του υπολογίζεται απο τη σχέση

$$\frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3m_pc^2 \to 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \to v = \sqrt{8}c/3 \tag{71}$$

(γ) Η κινητική του ενέργεια είναι $K = E - m_pc^2 = 2m_pc^2 = 1876.6MeV$. (δ) Τέλος η ορμή του είναι

$$p = \frac{m_pv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{c} \frac{1}{c} = 3m_pc^2 \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{c} = 2654MeV/c \tag{72}$$

Πριν προχωρήσουμε σε μερικές βασικές εφαρμογές των παραπάνω, θα ήθελα να κάνω δύο πολύ χρήσιμα σχόλια:

Σχόλιο 1: **Ο μετασχηματισμός της ενέργειας και της ορμής**. Ας θεωρήσομε ένα σώμα μάζας m που κινείται ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς Σ με ταχύτητα **v**. Το σώμα αυτό έχει ενέργεια και ορμή που δίδονται απο τους τύπους (62) και (55) αντίστοιχα.

Φανταστείτε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Σ', κινούμενο ως προς το Σ, όπως δείχνει το Σχήμα 1. Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος ως προς τον Σ' δίδονται από τις σχέσεις (46), (47) και (48). Χρησιμοποιώντας αυτές, μπορείτε να υπολογίσετε τις συνιστώσες της ορμής (p'_x, p'_y, p'_z) καθώς και την ενέργεια E' του σώματος ως προς τον Σ', συναρτήσει τών αντιστοίχων (p_x, p_y, p_z) και E ως προς τον Σ. Η απάντηση που θα καταλήξετε είναι

$$\boxed{\begin{pmatrix} E' \\ cp'_x \\ cp'_y \\ cp'_z \end{pmatrix} = \Lambda(V) \begin{pmatrix} E \\ cp_x \\ cp_y \\ cp_z \end{pmatrix}} \tag{73}$$

με $\Lambda(V)$ τόν ίδιο πίνακα (39) μετασχηματισμού των συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, οι τέσσερις ποσότητες (E, cp_x, cp_y, cp_z) μετασχηματίζονται όταν αλλάζομε σύστημα αναφοράς, ακριβώς όπως οι χωροχρονικές συντεταγμένες (ct, x, y, z) των γεγονότων.

Γενίκευση: Η σχέση (73) ισχύει γενικά για την ολική ενέργεια και ορμή **P** οποιουδήποτε φυσικού συστήματος. Σκεφτείτε οτι σε κάθε τέτοιο σύστημα η E και η **P** μπορούν να θεωρηθούν ως η ενέργεια και η ορμή **ενός** φανταστικού σώματος στο κέντρο μάζας του συστήματος. Γράφουμε λοιπόν γενικά

$$\boxed{\begin{pmatrix} E' \\ cP'_x \\ cP'_y \\ cP'_z \end{pmatrix} = \Lambda(V) \begin{pmatrix} E \\ cP_x \\ cP_y \\ cP_z \end{pmatrix}} \tag{74}$$

Σχόλιο 2: Αφού οι μετασχηματισμοί (36) και (74) είναι οι ίδιοι, τα βήματα που οδήγησαν στη σχέση (42) οδηγούν επίσης και στη σχέση

$$\boxed{E'^2 - c^2P'^2_x - c^2P'^2_y - c^2P'^2_z = E^2 - c^2P^2_x - c^2P^2_y - c^2P^2_z} \tag{75}$$

για την ενέργεια και τις συνιστώσες της ορμής ενός φυσικού συστήματος ως προς δύο οποιαδήποτε αδρανειακά συστήματα. Ειδκά για ένα σωμάτιο μάζας m η αναλλοίωτη αυτή ποσότητα ισούται με

$$E^2 - c^2 P_x^2 - c^2 P_y^2 - c^2 P_z^2 = m^2 c^4 \,. \tag{76}$$

Τέλος, για ένα σύστημα σωμάτων η τιμή της ποσότητας αυτής ορίζει αυτό που ονομάζεται **αναλλοίωτη μάζα** του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο επιταχυντής Large Hadron Collider (LHC) του CERN επιταχύνει σήμερα πρωτόνια, σε τελική ενέργεια E=3.5 TeV. Να υπολογισθούν (α) η κινητική ενέργεια των πρωτονίων, (β) η ορμή τους και (γ) η ταχύτητά τους.

2. Πρωτόνιο των Κοσμικών Ακτίνων έχει ενέργεια E=10 GeV. Ζητούνται (α) η κινητική του ενέργεια K, (β) η ταχύτητά του με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου, (γ) η ορμή του. (δ) Τί ταχύτητα για το πρωτόνιο αυτό προβλέπει ο τύπος της κινητικής ενέργειας του Νεύτωνα;

3. Ραδιενεργός πυρήνας σε κάποιο εργαστήριο εκπέμπει φωτόνιο με ενέργεια E=10 MeV. Να υπολογιστούν (α) την ορμή του φωτονίου, (β) την συχνότητά του και (γ) την ταχύτητα του φωτονίου ως προς παρατηρητή κινούμενο με ταχύτητα V ως προς το εργαστήριο.

4. *Μέτρηση της μάζας του νετρίνου*. Από έκκρηξη supernova σε απόσταση L από τη Γη παράχθηκαν φωτόνια και νετρίνα με την ίδια ενέργεια E. Τα νετρίνα έφτασαν στη Γη χρόνο T μετά τα φωτόνια. Να υπολογιστεί η μάζα m του νετρίνου, συναρτήσει των L, E, T και της ταχύτητας του φωτός c. Εφαρμογή: $L = 2 \times 10^6 lyrs$, E=1MeV, T=1min.

5. Πυρηνικός αντιδραστήρας καταναλώνει 0.01 mole ραδιενεργού υλικού X, οι πυρήνες του οποίου διασπώνται σύμφωνα με την αντίδραση $X \to Y + A$, για να θερμάνει το νερό που περιέχει, μάζας $= 10^4 kg$. Δίδονται οι μάζες $m_X = 230.422 GeV/c^2$, $m_Y = 226.410 GeV/c^2$ και $m_A = 4.010 GeV/c^2$, αντίστοιχα, καθώς επίσης η ειδική θερμότητα $C = 4.19 kJ/kgr\,^oC$ του νερού. Υπολογίστε (α) την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού του αντιδραστήρα και (β) πόση ποσότητα πετρέλαιο εκτιμάτε ότι θα χρειαζόμασταν για να επιτύχομε το ίδιο αποτέλεσμα.

10 Βασικές εφαρμογές

Θα μελετήσομε τώρα μιά σειρά από φαινόμενα κάνοντας χρήση των νέων, σχετικιστικών εκφράσεων της ενέργειας και της ορμής ενός συστήματος σωμάτων.

10.1 Διάσπαση σωματίου

Μια απλή εφαρμογή των νόμων διατήρησης ενέργειας και ορμής είναι σε αντιδράσεις διάσπασης σωματίων. Είναι οι αντιδράσεις που στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου ήταν αδύνατο να κατανοήσουμε με βάση την μηχανική του Νεύτωνα.

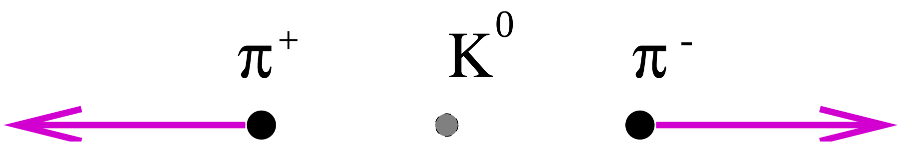
Ας πάρουμε για παράδειγμα τη διάσπαση

$$K^0 \to \pi^+ + \pi^- \tag{77}$$

ενός ουδέτερου Καονίου σε δύο φορτισμένα π μεσόνια.

Δίδονται οι μάζες $M \equiv m_{K^0} = 498 MeV/c^2$ και $m \equiv m_{\pi^\pm} = 138 MeV/c^2$. Ζητούνται οι ταχύτητες των δύο πιονίων στο σύστημα ηρεμίας του διασπώμενου K^0.

Ο νόμος διατήρησης της ορμής σε συνδυασμό με το γεγονός οτι στην αντίδραση που μελετάμε οι μάζες των προιόντων είναι ίσες, συνεπάγονται οτι τα δύο π μεσόνια θα εκπεμφθούν προς αντίθετες κατευθύνσεις και με την ίδια ταχύτητα.



Σχήμα 14: ’Η διάσπαση του ^{0} στο σύστημα ηρεμίας του.

Ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με απλή εφαρμογή του νόμου διατήρησης της ενέργειας. Πράγματι, πρίν τη διάσπαση η ενέργεια του συστήματος ήταν η ενέργεια ηρεμίας Mc^2 του K^0, ενώ μετά τη διάσπαση έχομε δύο φορές την ενέργεια σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα v.

Γράφουμε λοιπόν

$$Mc^2 = 2\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{78}$$

απο την οποία βρίσκουμε οτι

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{4m^2}{M^2} \to v \simeq 0.832c \tag{79}$$

10.2 Πυρηνικές διασπάσεις

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να μελετήσει και διασπάσεις διαφόρων μετασταθών πυρήνων. Η ορθότητα των τύπων ενέργειας και ορμής επαληθεύεται σε όλες τις πυρηνικές αντιδράσεις.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την διάσπαση ενός ακίνητου πυρήνα ραδιενεργού ραδίου σε ραδόνιο και ήλιο.

$${}^{226}_{88}Ra \to {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He \tag{80}$$

Δίδονται οι μάζες $m_{Ra} = 226.0254u$, $m_{Rn} = 222.0175u$ και $m_{He} = 4.0026u$ [12].

[12] Η ατομική μονάδα μάζης $1u \equiv$ το 1/12 της μάζας του ατόμου του ${}^{12}_{6}C = 1.66 \times 10^{-27}kg = 931.5 MeV/c^2$.

Ερώτηση 1: Πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια των προιόντων της αντίδρασης.

Απάντηση: Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{initial} = m_{Ra}c^2 \tag{81}$$

και η τελική

$$E_{final} = E_{Rn} + E_{He} = m_{Rn}c^2 + K_{Rn} + m_{He}c^2 + K_{He} \tag{82}$$

όπου με K συμβολίζουμε την κινητική ενέργεια.

Η διατήρηση της ενέργειας συνεπάγεται για την ζητούμενη συνολική κινητική ενέργεια

$$K = K_{Rn} + K_{He} = (m_{Ra} - m_{Rn} - m_{He})c^2 \tag{83}$$

Η ενέργεια ηρεμίας του αρχικού πυρήνα μετατρέπεται σε ενέργεια ηρεμίας των προιόντων και το πλεόνασμα, που δίδεται απο τη σχέση αυτή, διατίθεται σε κινητική ενέργεια των τελευταίων.

Αντικαθιστώ στη σχέση αυτή τις δεδομένες μάζες και βρίσκω

$$K = 0.0053u \times 931.5MeV/c^2uc^2 = 4.94MeV \tag{84}$$

Παρατηρείστε οτι η παραπάνω πυρηνική διάσπαση απελευθερώνει *εκατομμύρια φορές περισσότερη ενέργεια από μιά τυπική χημική αντίδραση!*.

Ερώτηση 2: Πόση ενέργεια εκλύεται συνολικά σε κινητική ενέργεια από τη διάσπαση ενός γραμμομορίου ραδιενεργού ραδίου;

Απάντηση: Είδαμε παραπάνω οτι από τη διάσπαση ενός πυρήνα ραδίου εκλύεται ενέργεια 4.94MeV. Επομένως, από ένα mole ραδίου θα εκλυθούν $K^{mole} = N_A \times 4.94MeV = 6.023 \times 4.94 \times 10^{23}MeV = 29.75 \times 10^{23}MeV = 29.75 \times 1.6 \times 10^{10}Joules = 4.76 \times 10^{11}Joules = 4.76/4.184 \times 10^{11}cal = 1.14 \times 10^{11}cal$.

Ερώτηση 3: Φανταστείτε οτι χρησιμοποιώ την ενέργεια που εκλύεται απο τη διάσπαση 1 mole Ra για να ζεστάνω νερό. Πόσης ποσότητας νερού μπορώ έτσι να αλλάξω την θερμοκρασία από 20^0C σε 90^0C;

Απάντηση: Για να αλλάξω την θερμοκρασία σώματος μάζας M κατά ΔΘ απαιτείται θερμότητα $Q = MC\Delta\Theta$, όπου C η ειδική θερμότητα του σώματος. Για το νερό έχομε $C = 1cal/grgrad$ [13] και διαθέτουμε ενέργεια K^{mole}. Η ποσότητα νερού που μπορούμε να θερμάνουμε είναι

$$M = \frac{K^{mole}}{C\Delta\Theta} = 1.6 \times 10^6 kg \tag{85}$$

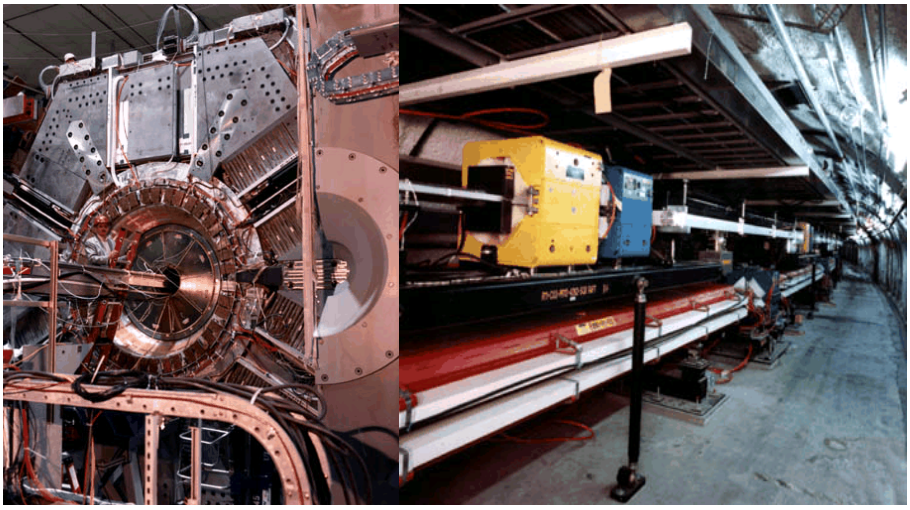
Σκεφτείτε! Με ένα τέταρτο του κιλού ράδιο μπορώ να ζεστάνω κατά 70 βαθμούς χίλιους τόνους νερό! Με την ίδια ποσότητα κάρβουνο ή TNT θα ζεσταίναμε μόλις ένα κιλό! Η ενέργεια που εκλύεται από πυρηνικές αντιδράσεις είναι της τάξης του ενός εκατομμυρίου φορές μεγαλύτερη από αυτήν που εκλύεται κατά την συνήθη καύση. Περισσότερα για τις πυρηνικές αντιδράσεις και τη σημασία τους θα μάθουμε στην Πυρηνική Φυσική.

10.3 Κίνηση σώματος υπό την επίδραση σταθερής δύναμης

Σώμα μάζας M βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Τη χρονική στιγμή t=0 εφαρμόζουμε πάνω του μια σταθερή δύναμη f στην κατεύθυνση του άξονα x. Να μελετηθεί η κίνησή του.

Το σκηνικό που περιγράφομε εδώ είναι μια καλή προσέγγιση για τη μελέτη της κίνησης φορτίων σε ένα γραμμικό επιταχυντή, όπου φορτισμένα σωμάτια (ηλεκτρόνια, ποζιτρόνια, πρωτόνια) επιταχύνονται υπο την επίδραση σταθερού ηλεκτρικού πεδίου.

[13] Αγνοώ την μικρή εξάρτηση της ειδικής θερμότητας από την θερμοκρασία.



Σχήμα 15. Ο γραμμικός επιταχυντής στο Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) των ΗΠΑ.

Το υπό μελέτην σώμα ξεκινά από την ηρεμία υπό την επίδραση δύναμης στην κατεύθυνση x. 'Ολη η κίνηση επομένως εξελίσσεται στον άξονα x. Οι y και z συνιστώσες της ταχύτητας παραμένουν μηδέν.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος ως προς το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$\frac{d}{dt}\frac{Mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = f \tag{86}$$

όπου v η x-συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος.

(α) **Η ταχύτητα v(t)**. Ολοκληρώνω ως προς χρόνο από 0 μέχρι t τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και παίρνω

$$\frac{Mv(t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = ft \tag{87}$$

ή ισοδύναμα

$$v(t) = \frac{\frac{ft}{M}}{\sqrt{1+\frac{f^2t^2}{M^2c^2}}} \tag{88}$$

Για μικρούς χρόνους, δηλαδή για $ft/Mc \ll 1$ το σώμα δεν έχει ακόμα αναπτύξει μεγάλη ταχύτητα, και επομένως ο παραπάνω τύπος ανάγεται όπως περιμέναμε στο Νευτώνειο αποτέλεσμα

$$v(t) \sim \frac{f}{M}t + ... \tag{89}$$

Αντίστοιχα, για μεγάλους χρόνους $ft/Mc \gg 1$, η ταχύτητα πλησιάζει ασυμπτοτικά την ταχύτητα του φωτός

$$v(t) \to c \tag{90}$$

(β) **Η θέση x(t) του σώματος**. Η εξίσωση (88) γράφεται επίσης

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{ft/M}{\sqrt{1+f^2t^2/M^2c^2}} \tag{91}$$

από την οποία με ολοκλήρωση και των δύο μελών ως προς χρόνο παίρνουμε [14]

$$x(t) = \frac{Mc^2}{f}\Big(\sqrt{1+\frac{f^2t^2}{M^2c^2}} - 1\Big) \tag{92}$$

[14] Παρατηρείστε οτι $(f/M)tdt = (Mc^2/2f)d(1+f^2t^2/M^2c^2)$.

Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα Taylor $\sqrt{1+w} \sim 1 + w/2 + ...$ για $|w| \ll 1$ για να βεβαιωθείτε οτι για μικρούς χρόνους $ft/Mc \ll 1$ παίρνετε το Νευτώνειο αποτέλεσμα

$$x(t) \sim \frac{1}{2}\frac{f}{M}t^2 + ... \tag{93}$$

Επίσης, εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε οτι για μεγάλους χρόνους η σχέση (92) γίνεται

$$x(t) \sim ct \tag{94}$$

όπως αναμενόταν με βάση προηγούμενο σχόλιο για την οριακή ταχύτητα του σώματος.

(γ) **Η επιτάχυνση a(t) του σώματος** υπολογίζεται με μιά απλή παραγώγιση της (88) ως προς τον χρόνο. Το αποτέλεσμα είναι:

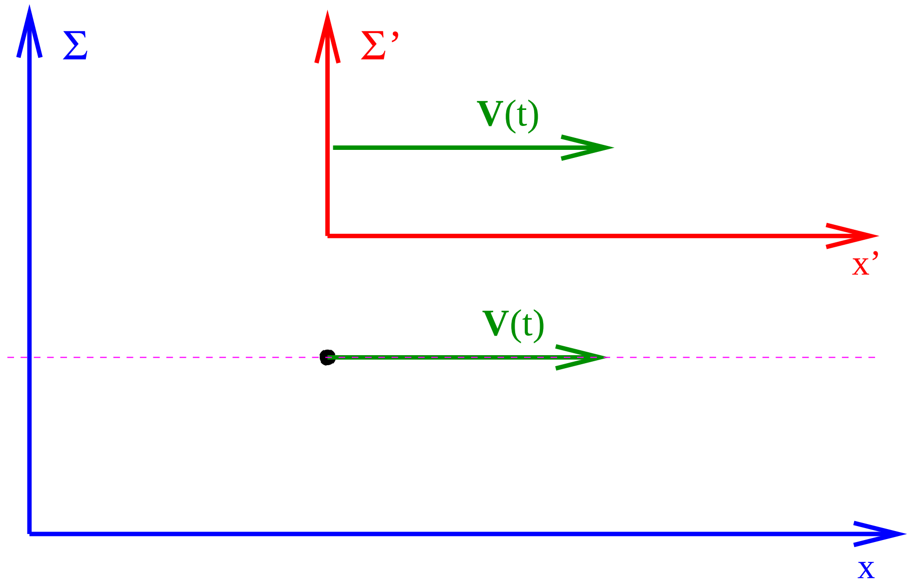
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\frac{f}{M}}{\left(1 + \frac{f^2t^2}{M^2c^2}\right)^{3/2}} \tag{95}$$

Η επιτάχυνση ξεκινάει από την τιμή f/M για t=0 και τείνει στο μηδέν σαν $\sim t^{-3}$ για μεγάλους χρόνους. Σταθερή δύναμη δεν συνεπάγεται σταθερή επιτάχυνση. Κάτι τέτοιο θα είχε σαν αποτέλεσμα αργά ή γρήγορα το σώμα να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός.

Σχήμα 16: Οι γραφικές παραστάσεις των $x(t)$, $v(t)$ και $a(t)$ σώματος υπό την επίδραση σταθερής δύναμης στην κατεύθυνση . Το σώμα ξεκίνησε από την ηρεμία στη θέση $x = 0$.

(δ) **Η επιτάχυνση στο σύστημα ηρεμίας του σώματος**. Τί επιτάχυνση αισθάνεται το ίδιο το σώμα; Ενας παρατηρητής στο σύστημα ηρεμίας του σώματος αντιλαμβάνεται μονίμως ένα ακίνητο σώμα υπο την επίδραση μιας σταθερής δύναμης. 'Αρα ως προς αυτόν το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση $a_0 = f/M$.

Πράγματι, στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγει κανείς και ως εξής: Το σύστημα ηρεμίας του σώματος ΔΕΝ είναι αδρανειακό. Αυτό είναι φανερό, αφού το σώμα επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου μας. Την χρονική στιγμή t η ταχύτητα του σώματος δίδεται απο τη σχέση (88). Επομένως, ένα σύστημα που κινείται κατά το χρονικό διάστημα $(t, t+dt)$ με τη σταθερή ταχύτητα $v(t)$ είναι αδρανειακό και για απειροστά μικρό dt συμπίπτει με το σύστημα ηρεμίας του σώματος. Είναι αυτό που λέμε *στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας του σώματος*.



Σχήμα 17: Το σύστημα Σ' είναι το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας του σώματος Α. Το Σ είναι το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου. Η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων είναι η στιγμιαία ταχύτητα $v(t)$ του σώματος.

Η επιτάχυνση επομένως του Α ως προς τον εαυτό του υπολογίζεται από τον τύπο (51), βάζοντας την σχετική ταχύτητα $V = v_x(t)$, ίση δηλαδή προς την στιγμιαία ταχύτητα του σώματος. Το αποτέλεσμα είναι

$$a'_x = a_x \Big(1 - \frac{v_x(t)^2}{c^2}\Big)^{-3/2} \tag{96}$$

Χρησιμοποιώντας τέλος την έκφραση (88) για την $v_x(t)$ καταλήγομε στο οτι $a'_x = f/M$.

(ε) Ενα άλλο ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: Πόσος χρόνος t' έχει περάσει σύμφωνα με το ρολόι του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t του ρολογιού στο εργαστήριο;

Πάρτε πάλι το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας Σ' του σωματιδίου το χρονικό διάστημα (t,t+dt) ως προς το εργαστήριο. Στο χρονικό διάστημα dt του Σ αντιστοιχεί το dt' κατά τον Σ', που δίδεται από τον τύπο της διαστολής του χρόνου

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}} \tag{97}$$

Αντικαθιστώ την $v(t)$ από την (88) και ολοκληρώνω στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα $(0, t)$ και $(0, t')$ και παίρνω

$$\int_0^{t'} dt' = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + f^2 t^2/M^2 c^2}} \tag{98}$$

με τελικό αποτέλεσμα τη σχέση

$$t' = \frac{Mc}{f} sh^{-1}(ft/Mc) \tag{99}$$

(στ) Κοσμοναύτης παίρνει το διαστημόπλοιό του και με σταθερή επιτάχυνση $a_0 = 1g \simeq 10m/sec^2$ (όπως την αντιλαμβάνεται ο ίδιος) κατευθύνεται προς την Ανδρομέδα, που απέχει από τη Γη 2000000 έτη φωτός. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φθάσει στον προορισμό του; Ζητάμε με άλλα λόγια τον χρόνο t' που θα χρειαστεί ο κοσμοναύτης όπως τον μετράει ο ίδιος, για να διανύσει απόσταση x=2000000 έτη φωτός, όπως τα μετράει ο αδρανειακός γήινος παρατηρητής.

Χρειαζόμαστε επομένως τη σχέση $x(t')$, που δίνει την απόσταση που διανύει ο κοσμοναύτης (κατά τον Σ), σαν συνάρτηση του χρόνου t' του Σ'.

Η απόσταση $x(t)$ που διανύει, σαν συνάρτηση του χρόνου του Γήινου παρατηρητή δίδεται από τη σχέση (92). Αντιστρέφοντας την (99) παίρνομε

$$\frac{a_0 t}{c} = sh(a_0 t'/c) \tag{100}$$

την οποία αντικαθιστώντας στην (92) βρίσκουμε

$$x(t') = \frac{c^2}{a_0}\Big(ch(a_0 t'/c) - 1\Big) \tag{101}$$

Εφαρμογή: Για $a_0 = 10m/sec^2$ και $x = 2000000$ έτη φωτός ο ζητούμενος χρόνος είναι $t' = (c/a_0)ch^{-1}(1 + a_0 x/c^2) \simeq \ln(1.8 \times 10^6)years \simeq 15.2years$. 'Εχοντας, λοιπόν, σταθερή επιτάχυνση ίση προς την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης μπορείτε να φτάσετε στην Ανδρομέδα, που απέχει από τη γη 2000000 έτη φωτός, σε μόλις 15 χρόνια!!

Κατά τον Νεύτωνα ο απαιτούμενος χρόνος για το ταξίδι αυτό θα ήταν περισσότερα από 1000 χρόνια! **Αποδείξτε το**.

10.4 Ο ιδιοχρόνος παρατηρητή - Η ένδειξη ρολογιού σε τυχούσα κίνηση

Ταξιδιώτης κινείται πάνω στη τροχιά x=x(t) κατά μήκος (για απλότητα) του άξονα των x αδρανειακού συστήματος Σ. Πόσο χρόνο δείχνει το ρολόϊ του ταξιδιώτη ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 του Σ;

Κατά το στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt ο ταξιδιώτης κινείται με ταχύτητα $v(t) = dx(t)/dt$, που στο μικρό αυτό χρονικό διάστημα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, και ο ταξιδιώτης να ορίζει το **στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα** με ταχύτητα $v(t)$. Επομένως,

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}}\,, \tag{102}$$

ή ισοδύναμα

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}dt\,. \tag{103}$$

Αρα, η ένδειξη του ρολογιού του ταξιδιώτη θα είναι

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = \int_1^2 \sqrt{dt^2 - dx^2/c^2} = \int_1^2 ds/c\,, \tag{104}$$

όπου

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{105}$$

η στοιχειώδης χωροχρονική απόσταση.

Η παραπάνω σχέση γενικεύεται εύκολα. Ρολόϊ που κινείται σε τυχούσα τροχιά $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ στο χώρο ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 του ρολογιού του Σ θα δείξει οτι πέρασε χρόνος ίσος με

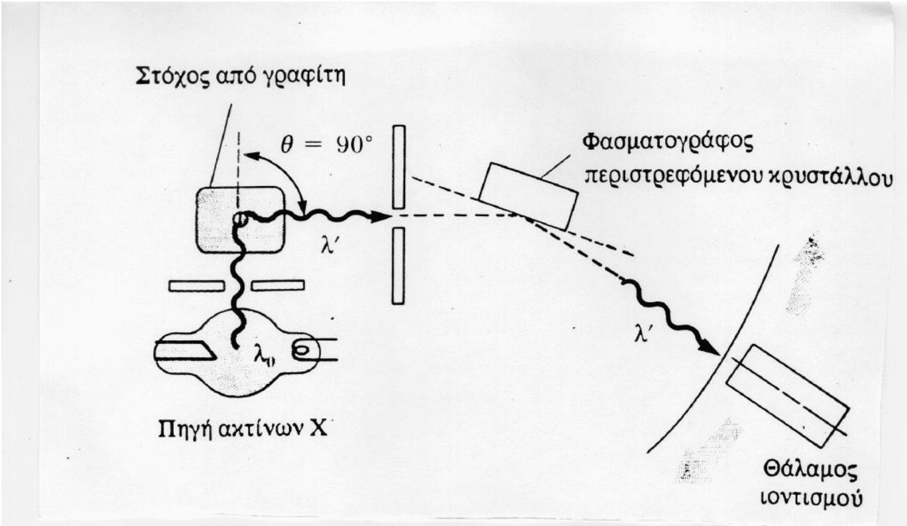
$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = \int_1^2 ds/c\,. \tag{106}$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι η φυσική σημασία του στοιχείου μήκους μιάς τροχιάς στο χωρόχρονο είναι $ds = cd\tau$, δηλαδή η ταχύτητα του φωτός επί το χρόνο $d\tau$, που δείχνει ρολόϊ που κινείται κατά μήκος του αντίστοιχου στοιχείου της τροχιάς. Ο χρόνος τ ονομάζεται **ιδιοχρόνος** του ρολογιού (παρατηρητή).

10.5 Σκέδαση φωτονίων - Φαινόμενο Compton

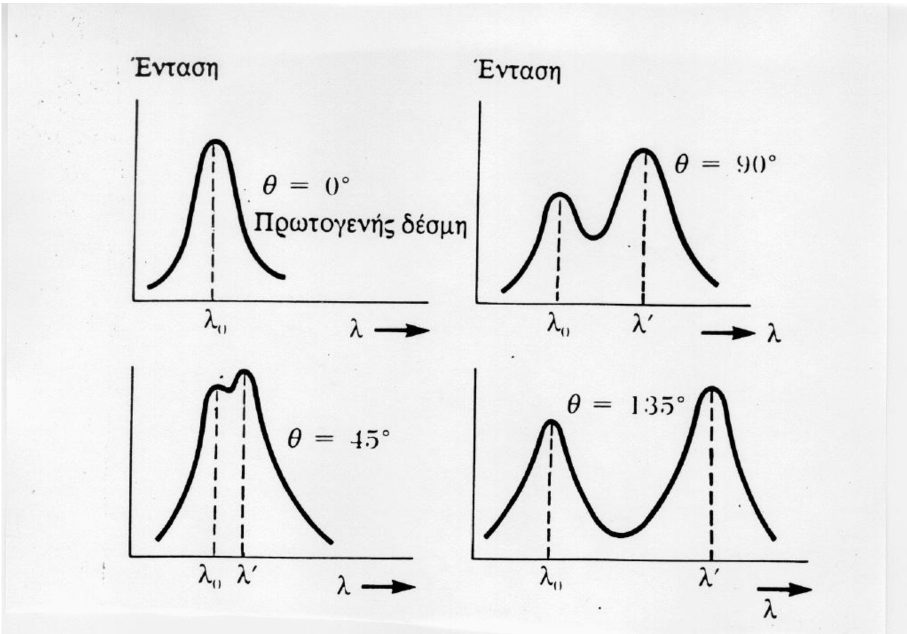
Ο Arthur Compton σε πειράματα που έκανε στο πανεπιστήμιο Washington του Saint Louis των ΗΠΑ παρατήρησε οτι το μήκος κύματος ακτίνων χ αυξάνει μετά τη σκέδασή τους από την ύλη. Η αύξηση αυτή, απολύτως κατανοητή και αναμενόμενη σήμερα, ήταν αδύνατο να ερμηνευθεί από την κυματική θεωρία του φωτός, και απετέλεσε ένα ακόμη ισχυρό επιχείρημα υπέρ του σωματιδιακού χαρακτήρα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Το πείραμα: Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποίησε ο Compton φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 18.



Σχήμα 18: Το πείραμα του Compton.

Μονοχρωματική δέσμη ακτίνων χ, μήκους κύματος λ, πέφτει πάνω σε κάποιο υλικό και σκεδάζεται προς διάφορες κατευθύνσεις. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο φασματογράφο μετρούμε, για δεδομένη γωνία σκέδασης θ, την ένταση του σκεδαζόμενου φωτός σαν συνάρτηση του μήκους κύματος λ'. Κάποια από τα αποτελέσματα του Compton αποδίδονται στο Σχήμα 19 που ακολουθεί.



Σχήμα 19: Η ένταση του σκεδασμένου φωτός συναρτήσει του μήκους κύματος λ' για τις αναγραφόμενες τιμές της γωνίας σκέδασης. Η προσπίπτουσα δέσμη έχει μήκος κύματος λ.

Δύο βασικά χαρακτηριστικά των παραπάνω γραφικών παραστάσεων που καλούμαστε να εξηγήσουμε είναι (α) οτι για κάθε γωνία υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο της έντασης για $\lambda' = \lambda$, και (β) οτι για μη μηδενικές γωνίες σκέδασης εμφανίζεται ένα ακόμα μέγιστο σε τιμή του $\lambda' > \lambda$. Πώς εξηγούνται όλα αυτά;

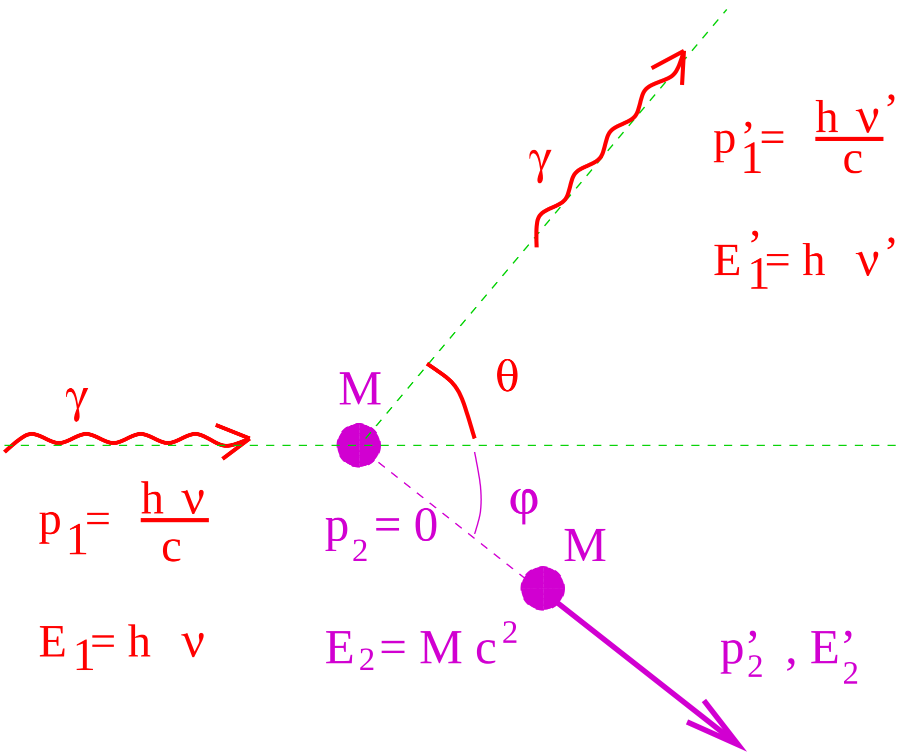
'Ενα απλό μοντέλο: Για να κατανοήσομε τα παραπάνω θα μελετήσομε την σκέδαση ενός φωτονίου από ένα ακίνητο φορτίο. Χειριζόμαστε με άλλα λόγια το φως σαν μια δέσμη φωτονίων, καθένα από τα οποία θα σκεδαστεί με τον ίδιο τρόπο που θα σκεδαστεί αυτό που θα μελετήσουμε. Τί είναι το φορτίο; Προφανώς, το φως σκεδάζεται από τα φορτία που βρίσκονται μέσα στην ύλη. Αυτά είναι ελεύθερα ηλεκτρόνια με μάζα m_e, ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια, που συμπεριφέρονται σαν βαριά σωμάτια με μάζα ουσιαστικά ίση με την μάζα ολόκληρου του ατόμου, και θετικά φορτισμένοι ατομικοί πυρήνες. Κανένα από αυτά φυσικά δεν είναι ακίνητο. Υπόκεινται τόσο σε κβαντομηχανικές όσο και σε θερμικές κινήσεις. Οι χαρακτηριστικές ταχύτητες αυτών των κινήσεων είναι πολύ μικρότερες απο την ταχύτητα του φωτός και επομένως σε πρώτη προσέγγιση θα τις αγνοήσουμε.

'Εστω, λοιπόν οτι φωτόνιο συχνότητας ν συγκρούεται με *ακίνητο* φορτίο μάζας m και σκεδάζεται στην κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς την αρχική. Αντίστοιχα, το φορτίο μετά τη σύγκρουση κινείται στην κατεύθυνση φ, όπως δείχνει το σχήμα.

Η ενέργεια του φωτονίου *πριν τη σκέδαση* είναι $E_1 = h\nu$ και η ορμή του $p_1 = h\nu/c$ στην κατεύθυνση x. Η ενέργεια και η ορμή του φορτίου πριν τη σκέδαση είναι $E_2 = mc^2$ και $p_2 = 0$, αντίστοιχα.

Αν με E_1', $\mathbf{p}_1'$ και E_2', $\mathbf{p}_2'$ συμβολίσουμε την ενέργεια και την ορμή του φωτονίου και του φορτίου *μετά τη σκέδαση*, έχουμε:

$$\begin{aligned} E_1' = h\nu' \;,\;\; p_{1x}' &= \frac{h\nu'}{c}\cos\theta \;,\;\; p_{1y}' = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta \\ p_{2x}' &= |\mathbf{p}_2'|\cos\phi \;,\;\; p_{2y}' = |\mathbf{p}_2'|\sin\phi \end{aligned}$$



Σχήμα 20: Η κινηματική της σκέδασης Compton.

Οι αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής οδηγούν στις σχέσεις

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + E_2' \tag{107}$$

$$\frac{h\nu}{c} + 0 = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + |\mathbf{p}_2'|\cos\phi \tag{108}$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - |\mathbf{p}_2'|\sin\phi \tag{109}$$

Οι (108) και (109) γράφονται ισοδύναμα στη μορφή

$$c|\mathbf{p}_2'|\cos\phi = h\nu - h\nu'\cos\theta\ ,\quad c|\mathbf{p}_2'|\sin\phi = h\nu'\sin\theta \tag{110}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις εξισώσεις αυτές και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνομε

$$\begin{aligned} c^2p_2'^2 &= h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta) \\ &= E_2'^2 - m^2c^4 \\ &= \Big(h(\nu-\nu') + mc^2\Big)^2 - m^2c^4 \\ &= h^2(\nu-\nu')^2 + 2mc^2h(\nu-\nu') \end{aligned}$$

όπου για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση $c^2p_2'^2 = E_2'^2 - m^2c^4$, ενώ για την τρίτη χρησιμοποιήσαμε την σχέση (107).

Εξισώνοντας τις εκφράσεις της πρώτης και της τελευταίας γραμμής παίρνομε τελικά

$$\frac{\nu-\nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) \tag{111}$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)} \tag{112}$$

Το δεξί μέλος είναι θετικό. Το μήκος κύματος του φωτός είναι μεγαλύτερο μετά τη σκέδασή του από το φορτισμένο σωμάτιο. Η συχνότητά του αντίστοιχα μικραίνει. 'Εκπληξη κατά την κλασσική κυματική θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, αλλά προφανές και αναμενόμενο σύμφωνα με τον σωματιδιακό χαρακτήρα του φωτός.

Η ποσότητα $\lambda_C \equiv h/mc$ ονομάζεται **μήκος κύματος Compton του σωματίου μάζας m**. Για το ηλεκτρόνιο ισούται με $\lambda_C(e) = 2.426 \times 10^{-12}cm = 2.426pm$. Για το πρωτόνιο είναι 1850 φορές μικρότερο.

ΑΣΚΗΣΗ: Φωτόνιο ακτίνων χ μήκους κύματος $10.0pm = 0.1$ σκεδάζεται από ακίνητο ηλεκτρόνιο. (α) Ποιό είναι το τελικό μήκος κύματος μετά απο σκέδαση σε γωνία 45^0; Απάντηση: $\lambda' = \lambda + \lambda_C(e)(1-\sqrt{2}/2) = 10.0pm + 0.293 \times 2.426pm = 10.7pm$. (b) Σε ποιά γωνία σκέδασης θα έχει τελικά το φωτόνιο το μέγιστο μήκος κύματος; Απάντηση: Το φωτόνιο χάνει το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειάς του όταν σκεδαστεί προς τα πίσω, δηλαδή για $\theta = 180^0$. Οπότε $\lambda' = \lambda + 2\lambda_C(e) \simeq 14.9pm$.

Επιστροφή στο πραγματικό πείραμα: Είμαστε τώρα έτοιμοι να ερμηνεύσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των πειραματικών καμπυλών του Σχήματος 19. (α) Τα ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια και οι ατομικοί πυρήνες σκεδάζουν το φως, αλλά οι μάζες τους είναι πολλές χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από αυτήν των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Συνεπώς, λόγω της μεγάλης μάζας στον παρονομαστή του τύπου του Compton περιμένουμε, για κάθε τιμή της γωνίας παρατήρησης, ένα μέγιστο στο $\lambda' \simeq \lambda$, που προέρχεται από τη σκέδαση του προσπίπτοντος φωτός απο τα φορτία αυτά. (β) Το δεύτερο μέγιστο που εμφανίζεται στα διαγράμματα του Σχήματος 19 οφείλεται ακριβώς στη σκέδαση από τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του υλικού, και βρίσκεται στην θέση που προβλέπει ο τύπος του Compton. (γ) Το οτι τα παρατηρούμενα μέγιστα δεν είναι απειροστά λεπτά, όπως θα περίμενε κανείς μέ βάση την παραπάνω ανάλυση, οφείλεται αφ' ενός στο οτι οι σκεδαστές δεν είναι ακίνητοι, και αφ' ετέρου στο οτι η αρχική δέσμη δεν είναι τέλεια μονοχρωματική.

10.6 Κατώφλι ενέργειας στο σύστημα του εργαστηρίου

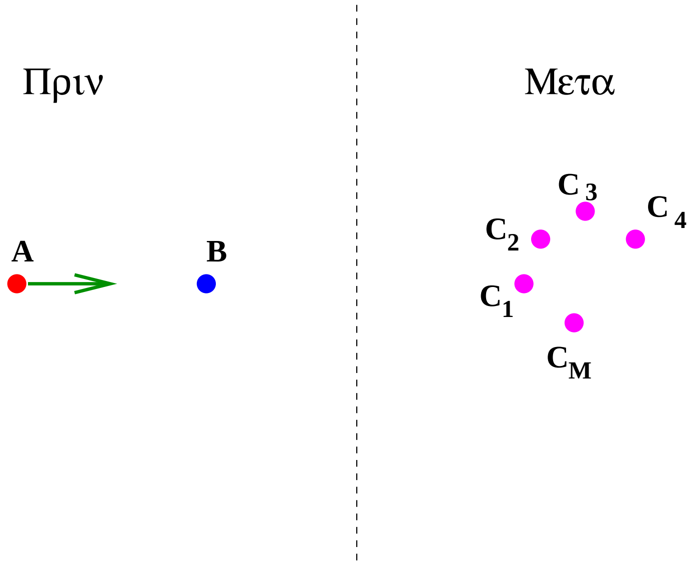
Σωμάτιο A (βλήμα) με ενέργεια E_A πέφτει σε ακίνητο σωμάτιο B (στόχος). Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της E_A ώστε να συμβεί η αντίδραση

$$A + B \to C_1 + C_2 + ... + C_n \tag{113}$$

όπου το σωμάτιο C_i έχει μάζα $m_i, i = 1, 2, ...n$. Το ερώτημα είναι μή τετριμμένο μόνο όταν το άθροισμα των μαζών των προιόντων είναι μεγαλύτερο από αυτό των αντιδρώντων, δηλαδή όταν $m_A + m_B < m_1 + m_2 + ... + m_n$. Στην αντίθετη περίπτωση η ενέργεια ηρεμίας των αντιδρώντων είναι ήδη αρκετή για να οδηγήσει στα προιόντα που ζητάμε.

Η συνθήκη για το ελάχιστο της απαιτούμενης ενέργειας διατυπώνεται πολύ απλά στο σύστημα κέντρου μάζας των αντιδρώντων, ως η τιμή εκείνη της ενέργειας για την οποία τα προιόντα θα παραχθούν όλα ακίνητα. [15]. Τότε η τελική ενέργεια του συστήματος είναι $E^{CM}_{min} = E^{CM}_{total} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)c^2$.

Στο σύστημα του εργαστηρίου *πριν* την αντίδραση έχομε την εικόνα στο αριστερό μισό του Σχήματος 21.



Σχήμα 21: Η εικόνα του συστήματος πριν την αντίδραση στο σύστημα του εργαστηρίου, και μετά την αντίδραση στο σύστημα κέντρου μάζης.

Η ολική ενέργεια και ορμή του συστήματος είναι:

$$E^{lab}_{initial} = E_A + m_B c^2 \ , \ \ P^{lab}_{initial} = \frac{1}{c}\sqrt{E_A^2 - m_A^2 c^4} \tag{114}$$

ενώ αντίστοιχα για την κατάσταση του συστήματος *μετά* την αντίδραση στο σύστημα Κέντρου Μάζης έχομε

$$E^{CM}_{final} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)c^2 \ , \ \ P^{CM}_{final} = 0 \tag{115}$$

Χρησιμοποιώ τους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής και γράφω

$$(E^{lab}_{initial})^2 - c^2(P^{lab}_{initial})^2 = (E^{lab}_{final})^2 - c^2(P^{lab}_{final})^2 \tag{116}$$

Χρησιμοποιώ το γεγονός οτι το σύστημα Κέντρου Μάζης είναι και αυτό αδρανειακό, και οτι η ποσότητα $^2 - c^2P^2$ παραμένει αναλλοίωτη όταν αλλάζομε αδρανειακό σύστημα, και γράφω

$$(E^{lab}_{final})^2 - c^2(P^{lab}_{final})^2 = (E^{CM}_{final})^2 - c^2(P^{CM}_{final})^2 \tag{117}$$

[15]Η συνθήκη αυτή δεν μπορεί να ικανοποιηθεί στο σύστημα του εργαστηρίου, διότι είναι σε αντίθεση με τη διατήρηση της ορμής.

'Αρα τελικά έχω τη σχέση

$$(E^{lab}_{initial})^2 - c^2(P^{lab}_{initial})^2 = (E^{CM}_{final})^2 - c^2(P^{CM}_{final})^2 \tag{118}$$

ή ισοδύναμα

$$(E_A + m_B c^2)^2 - (E_A^2 - m_A^2 c^4) = (m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 c^4 \tag{119}$$

Λύνοντας ως προς E_A βρίσκουμε

$$E_A = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} c^2 \tag{120}$$

για την ζητούμενη ελάχιστη ενέργεια.

10.7 Το φαινόμενο Doppler

Ολοι έχουμε εμπειρία του φαινομένου Doppler. Ολοι έχουμε βρεθεί σε κάποιον αυτοκινητόδρομο και έχουμε παρατηρήσει οτι ο ήχος της μηχανής ενός αυτοκινήτου είναι οξύτερος όταν αυτό μας πλησιάζει και γίνεται πιό βαθύς όταν μας προσπερνάει και απομακρύνεται.

Το ίδιο φαινόμενο ισχύει και για το φώς. Φωτεινή πηγή είναι ακίνητη στο σύστημα αναφοράς Σ και εκπέμπει ακτινοβολία μήκους κύματος λ ως προς το σύστημα αυτό. *Παρατηρητής Σ' απομακρύνεται από την πηγή* με ταχύτητα V. Θα αποδείξουμε οτι ο Σ' μετράει για την εν λόγω ακτινοβολία μήκος κύματος

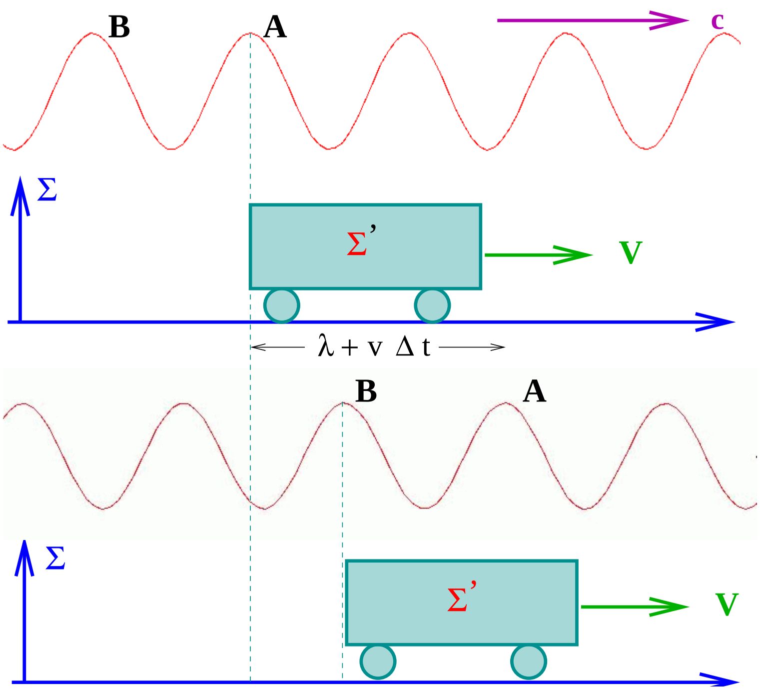
$$\boxed{\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}} \tag{121}$$

Ο απομακρυνόμενος από την πηγή παρατηρητής μετράει μεγαλύτερο μήκος κύματος από αυτό που μετράει παρατηρητής στο σύστημα ηρεμίας της πηγής.

Αντίστοιχα, όταν *ο Σ' πλησιάζει την πηγή* με ταχύτητα V, τότε μετράει μικρότερο μήκος κύματος, που δίδεται από τη σχέση

$$\boxed{\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}} \tag{122}$$

Θα αποδείξουμε την σχέση (121). Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσομε τους δύο παρατηρητές Σ και Σ' του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 22: Το σύστημα της πηγής Σ και ο απομακρυνόμενος παρατηρητής Σ'.

Η περίοδος κύματος ως προς κάποιον παρατηρητή είναι ο χρόνος που περνάει κατά τον παρατηρητή αυτόν ανάμεσα στις αφίξεις δύο διαδοχικών μεγίστων του κύματος. Αν λοιπόν t'_A και t'_B είναι οι χρονικές στιγμές στο σύστημα Σ' κατά τις οποίες φτάνουν στην αρχή των αξόνων του Σ' τα μέγιστα A και B του κύματος, τότε η περίοδός του T' κατά τον Σ' είναι

$$T' \equiv \frac{1}{\nu'} = \Delta t' = t'_B - t'_A \tag{123}$$

Τα γεγονότα: "άφιξη του μεγίστου A στην αρχή των αξόνων του Σ'" και "άφιξη του μεγίστου B στην αρχή των αξόνων του Σ'" λαμβάνουν εξ' ορισμού χώρα *στην ίδια θέση στο σύστημα Σ'*. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο της διαστολής του χρόνου, άν $\Delta t = t_B - t_A$ είναι η χρονική απόσταση κατά τον Σ των δύο αυτών γεγονότων, τότε

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{124}$$

Τα γεγονότα A και B είναι αυτά που δείχνουν τα Σχήματα 22(α) και 22(β) αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον Σ, στο χρόνο που πέρασε ανάμεσα στα δύο γεγονότα, το μέγιστο A του κύματος διήνυσε απόσταση $\Delta l = \lambda + V\Delta t$. 'Αρα,

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c} = \frac{\lambda + V\Delta t}{c} = \frac{1}{\nu} + \frac{V}{c}\Delta t \tag{125}$$

ή λύνοντας ως προς Δt

$$\Delta t = \frac{1}{\nu\left(1 - \frac{V}{c}\right)} \tag{126}$$

Αντικαθιστώντας τις (123) και (126) στην (124) παίρνουμε

$$\nu\left(1 - \frac{V}{c}\right) = \nu'\sqrt{\frac{1 - V^2}{c^2}} \rightarrow \nu = \nu'\sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \tag{127}$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \tag{128}$$

όπερ έδει δείξαι.

Σχόλιο 1: Ισοδύναμα, οι τύποι (121) και (122) δίνουν το μήκος κύματος λ' που μετράει παρατηρητής ως προς τον οποίο η πηγή απομακρύνεται ή αντίστοιχα πλησιάζει με ταχύτητα V.

Το φως που παρατηρούμε από απομακρυνόμενη πηγή παρουσιάζει μετατόπιση προς μεγαλύτερα μήκη κύματος. Το φαινόμενο καλείται *μετατόπιση προς το ερυθρό ή ερυθρόπηση* (red shift). Αντίστοιχα, σε φωτεινές πηγές που πλησιάζουν παρατηρούμε μετατόπιση προς μικρότερα μήκη κύματος, *μετατόπιση προς το μπλε* (blue shift).

Το φαινόμενο Doppler έχει πολλές και ποικίλες πρακτικές εφαρμογές. Απο την μετατόπιση των φασματικών γραμμών, που παρατηρούμε σε μιά πηγή, μπορούμε να υπολογίσομε την ταχύτητά της. Ετσι μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ροής κάποιου υγρού (όπως για παράδειγμα του αίματος στις αρτηρίες), ή ακόμα την ταχύτητα κάποιου απομακρυσμένου γαλαξία.

Σχόλιο 2: Στα παραπάνω η συζήτηση περιορίστηκε σε φωτεινές πηγές. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το φαινόμενο Doppler ισχύει γενικώτερα για οποιοδήποτε κύμα. Μπορείτε να επαναλάβετε την απόδειξη για την περίπτωση ενός ακουστικού κύματος;

Σχόλιο 4: Το μή σχετικιστικό όριο του τύπου Doppler. Οταν η πηγή κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός, τότε οι τύποι (121) και (122) παίρνουν την πιό γνωστή σας προσεγγιστική μορφή

$$\lambda' \simeq \lambda\Big(1 \pm \frac{V}{c}\Big) \tag{129}$$

αντίστοιχα.

Αποδείξτε το.

11 Διαγράμματα Minkowski

Η φυσική ασχολείται με την παρατήρηση, καταγραφή και μελέτη των συσχετίσεων ανάμεσα σε *γεγονότα*. Ενα γεγονός χαρακτηρίζεται από την θέση στην οποία έλαβε χώρα και από τη χρονική στιγμή στην οποία συνέβη. Επομένως, αν σχεδιάσουμε ένα τετραδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, με τρείς χωρικούς και έναν χρονικό άξονα, τότε κάθε γεγονός αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο σύστημα αυτό.

Ονομάζομε *χωροχρόνο* το σύνολο των γεγονότων στο Σύμπαν. Σε κάθε σύστημα αναφοράς αντιστοιχεί ένα σύστημα χωροχρονικών αξόνων. Διαφορετικοί παρατηρητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς άξονες να προσδιορίζουν τις χωρικές συντεταγμένες των γεγονότων και διαφορετικά ρολόγια να καθορίζουν τις στιγμές κατά τις οποίες συνέβησαν αυτά.

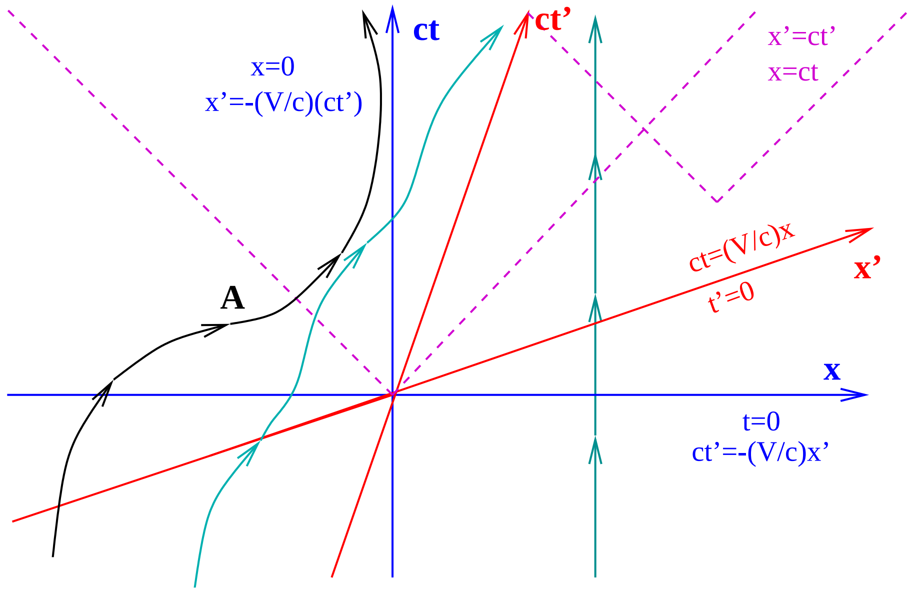
11.1 Κοσμικές γραμμές σωματίων, φωτός

Στο σχήμα που ακολουθεί μπορείτε εύκολα να αναγνωρίσετε

(α) Τους άξονες (ct, x) του συστήματος συντεταγμένων κάποιου παρατηρητή Σ. Είναι πιό βολικό να μετράμε τη χρονική συντεταγμένη με μονάδες μήκους όπως και τις συντεταγμένες θέσης. Για τον λόγο αυτό σημειώνομε την ποσότητα ct αντί για το χρόνο t στον κατακόρυφο άξονα.

(b) Την *κοσμική τροχιά* ενός σώματος ακίνητου στη θέση x=0 του συστήματος αυτού. Πρόκειται για την ευθεία (b) την παράλληλη προς τον άξονα ct του χρόνου, που διέρχεται από την θέση x=0 του άξονα των x.

(c) Την κοσμική τροχιά ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον παρατηρητή Σ.



Σχήμα 23: Γεγονότα, κοσμικές γραμμές, κοσμικές τροχιές σωμάτων, κώνοι φωτός.

(d) Τις τροχιές του μετώπου του φωτεινού κύματος που εξέπεμψε τη χρονική στιγμή t=0 φωτεινή πηγή ευρισκόμενη στη θέση x=0. Το κύμα εκπέμπεται με ταχύτητα c τόσο προς την θετική όσο και προς την αρνητική κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα των x. Ικανοποιεί τις σχέσεις $x = \pm ct$ και οι αντίστοιχες ευθείες είναι διχοτόμοι του πρώτου και δεύτερου τεταρτημορίου του Σχήματος.

(e) Το αυτό για φωτεινό κύμα που εξέπεμψε πηγή από τη θέση x_1 τη χρονική στιγμή t_1.

(e) Την κοσμική γραμμή που περιγράφει την πολύπλοκη κίνηση ενός σώματος.

(f) Μια κοσμική γραμμή που δεν είναι πραγματοποιήσιμη από κανένα σώμα. Για να είναι μια γραμμή στον χωρόχρονο επιτρεπτή κοσμική τροχιά ενός σώματος, πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη οτι η ταχύτητα του σώματος σε κάθε σημείο της να είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Με άλλα λόγια, η εφαπτομένη στην τροχιά σε κάθε σημείο να βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός στο σημείο αυτό. Η εφαπτομένη της τροχιάς (f) στο σημείο Α βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός στο Α.

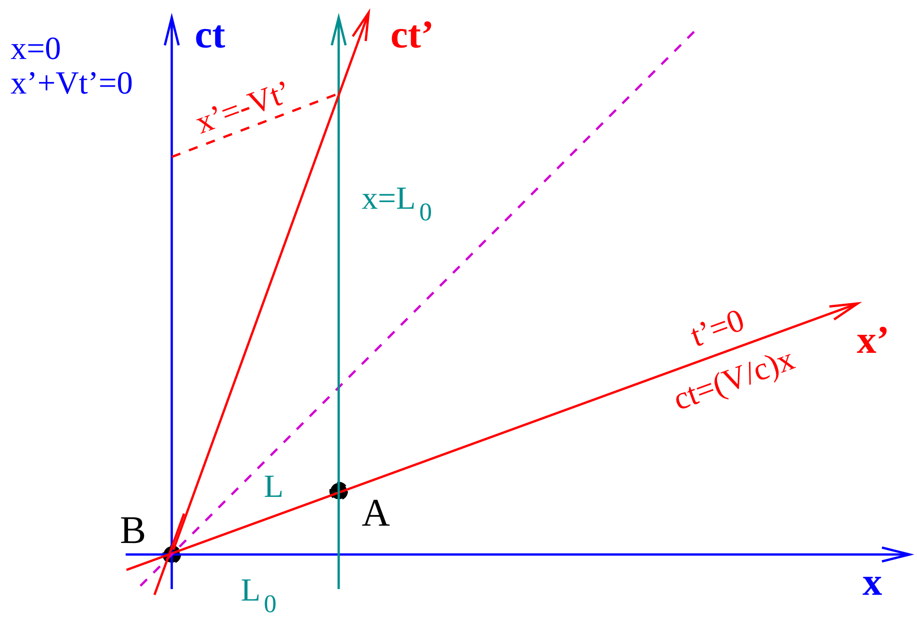
Χωροχρονικά διαγράμματα σαν τα παραπάνω ονομάζονται *διαγράμματα Minkowski*.

11.2 Διαστολή του χρόνου

Ας δούμε τώρα πώς μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει σχήματα σαν το προηγούμενο και ιδέες από τη γεωμετρία του χωρόχρονου, για να μελετήσει διάφορα φαινόμενα.

Θα ξεκινήσομε με το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου. Έχομε να συγκρίνομε χρονικές αποστάσεις γεγονότων ως προς δύο αδρανειακούς παρατηρητές. Ας σχεδιάσουμε τους αντίστοιχους άξονες των συντεταγμένων τους στον χωροχρόνο.

Ας πάρομε τον πρώτο (Σ) να έχει το σύστημα αξόνων {x,ct} του σχήματος που ακολουθεί, και ας σχεδιάσομε τον κώνο φωτός που αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων.



Σχήμα 24: Τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς και η διαστολή του χρόνου.

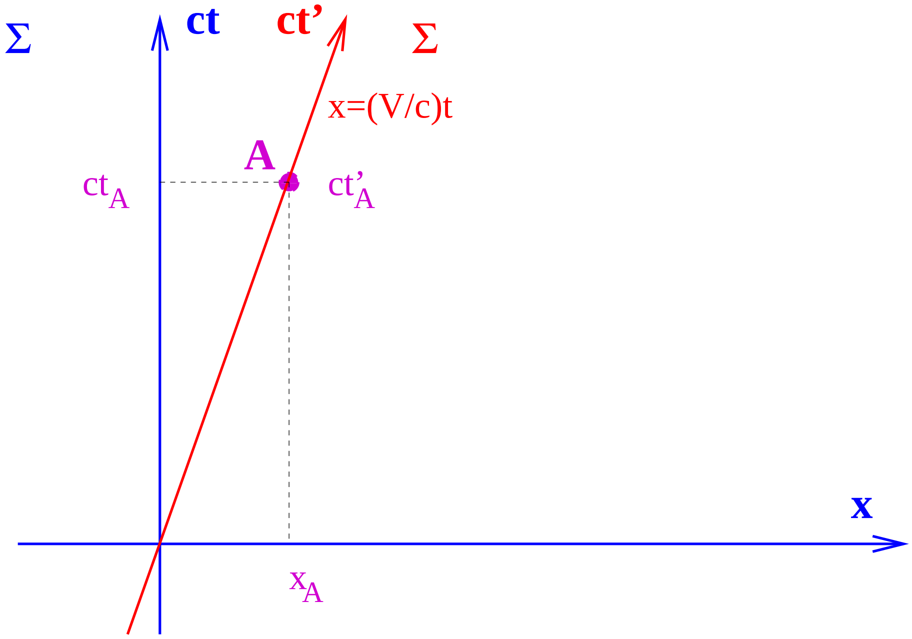
Ας πάρομε το δεύτερο σύστημα αναφοράς {x', ct'} (Σ'), που κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ, έτσι ώστε η αρχή των αξόνων του να συμπίπτει με την αρχή του Σ τη στιγμή t=0=t'. Ο άξονας των χρόνων του Σ' είναι η κοσμική γραμμή με x'=0 [16]. Από την άλλη όμως, η κοσμική γραμμή με x'=0 είναι η κοσμική τροχιά ενός σώματος στην αρχή των αξόνων του Σ'. Άρα είναι η γραμμή με εξίσωση

$$x = Vt \tag{130}$$

η γραμμή (ct') του σχήματος. Ο χωρικός άξονας x' του Σ' είναι τέτοιος ώστε η τροχιά του φωτεινού κύματος να είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι άξονες x' και ct'.

[16] Θυμηθείτε, κατ' αναλογίαν, οτι ο άξονας των y στο επίπεδο x-y της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι η γραμμή με x=0.

Η διαστολή του χρόνου. Φανταστείτε ένα ρολόι ακίνητο στην αρχή των αξόνων του Σ'. Τη στιγμή που πέρναγε από την αρχή των αξόνων του Σ έδειχνε t'=0, όπως και τα ρολόγια του Σ. Λίγο αργότερα, οι χωροχρονικές συντεταγμένες του ρολογιού είναι αυτές του γεγονότος A του Σχήματος 25.



Σχήμα 25.

Σύμφωνα με τον Σ έχει περάσει χρόνος t_A και το ρολόι βρίσκεται στη θέση x_A. Αντίστοιχα, κατά τον Σ' το ρολόι βρίσκεται στη θέση $x'_A = 0$ και η ώρα είναι t'_A, οι συντεταγμένες του γεγονότος A στο Σ'.

Το ζητούμενο είναι να βρούμε ποιά σχέση συνδέει τους χρόνους t_A και t'_A.

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (42) για το γεγονός A και γράφομε

$$c^2 t_A^2 - x_A^2 = c^2 t_A'^2 \tag{131}$$

Απο την άλλη, το γεγονός A βρίσκεται πάνω στη γραμμή με εξίσωση την (130), οπότε

$$x_A = V t_A \tag{132}$$

Ο συνδυασμός των δύο αυτών δίνει

$$t_A = \frac{t'_A}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{133}$$

Η γνωστή μας σχέση για την διαστολή του χρόνου. Για δύο γεγονότα που συμβαίνουν στην ίδια θέση ως προς τον Σ', ο Σ μετράει μεγαλύτερη χρονική απόσταση απ' ό,τι ο Σ'.

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ισχύει το θεώρημα του Πυθαγόρα για τις χωροχρονικές αποστάσεις στον χωρόχρονο Minkowski. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται, σύμφωνα με την (131), με τη *διαφορά* των τετραγώνων των κάθετων πλευρών, και όχι με το άθροισμά τους.

11.3 Συστολή του μήκους

Θα εφαρμόσουμε τώρα την ίδια μεθοδολογία για να μελετήσουμε το φαινόμενο της συστολής του μήκους. Για το σκοπό αυτό θα πάρουμε μια ράβδο ακίνητη στο σύστημα Σ του Σχήματος 24. Θα τοποθετήσομε για απλότητα το ένα άκρο της ράβδου στην αρχή των αξόνων $x = 0$ του Σ. Το άλλο θα έχει συντεταγμένη $x = L_0$. Προφανώς, το μήκος της ράβδου κατά τον Σ είναι L_0. Η κοσμική τροχιά του ενός άκρου της ράβδου είναι ο άξονας των χρόνων ct του Σ, ενώ το άλλο άκρο διαγράφει την τροχιά (B) του Σχήματος 24.

Ας πάρουμε τώρα και έναν δεύτερο παρατηρητή Σ', που όπως στο προηγούμενο σχήμα κινείται ως προς τον Σ προς τα δεξιά με ταχύτητα V. Οι άξονες του Σ' είναι οι x' και ct' του Σχήματος 24. 'Εστω ότι ο Σ' μετρά και αυτός το μήκος της ράβδου. Για να το κάνει αυτό θα πρέπει σε κάποια χρονική στιγμή t'_0 της επιλογής του, να σημειώσει τις θέσεις x' και x' του αριστερού και δεξιού άκρου της ράβδου. Το μήκος της κατά τον Σ' θα είναι $L = x' - x'_A$.

Ας κάνουμε λοιπόν ακριβώς αυτό. Διαλέγουμε να κάνουμε τη μέτρηση τη χρονική στιγμή t'=0. Το αριστερό άκρο της ράβδου βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $x'_A = 0$. Το δεξί βρίσκεται σε εκείνο το σημείο της κοσμικής τροχιάς που αντιστοιχεί σε t'=0, ήτοι στο σημείο Δ με τετμημμένη x'_Δ. Για το γεγονός Δ γράφομε

$$0 - x'^2_\Delta = c^2 t^2_\Delta - L^2_0 \quad \rightarrow \quad L^2 = L^2_0 - c^2 t^2_\Delta \tag{134}$$

Το γεγονός Δ βρίσκεται πάνω στην γραμμή t'=0. Απο την (36) συμπεραίνομε οτι τα σημεία της γραμμής αυτής ικανοποιούν τη σχέση $t = Vx/c^2$. 'Αρα ισχύει

$$t_\Delta = V x_\Delta / c^2 = V L_0 / c^2 \tag{135}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις καταλήγομε στην γνωστή μας σχέση

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{136}$$

Τα μήκη που μετράμε μικραίνουν όταν κινούμαστε ως προς αυτά.

12 Τετρανύσματα - Τανυστές Lorentz

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α′ Το αξίωμα της Σχετικότητας του Γαλιλαίου

Α′.1 Η μηχανική του Νεύτωνα και οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Η εξίσωση κίνησης ελεύθερου σώματος μάζας m ως προς αδρανειακό σύστημα Σ ήταν κατά τον Νεύτωνα

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0\,. \tag{137}$$

Η εξίσωση αυτή δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την ταχύτητα του σώματος κατά ένα σταθερό διάνυσμα **V**. Με άλλα λόγια ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}\,, \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{V}t + \mathbf{a} \tag{138}$$

αφήνει την εξίσωση κίνησης αναλλοίωτη, δηλαδή για τις τονούμενες ποσότητες ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = 0\,. \tag{139}$$

Μια ισοδύναμη διατύπωση αυτής της παρατήρησης μπορεί να γίνει σε δύο βήματα ως εξής:

Δήλωση 1: Ο μετασχηματισμός από ένα αδρανειακό σύστημα Σ σε άλλο Σ', με σχετική ταχύτητα **V**, δίνεται από τις σχέσεις (138).

Δήλωση 2: Ο νόμος κίνησης (3) ελεύθερου σώματος είναι ο ίδιος ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

Ο μετασχηματισμός (138) ονομάζεται μετασχηματισμός Γαλιλαίου, και από τα παραπάνω συμπεραίνει κανείς ότι η εξίσωση του Νεύτωνα για ελεύθερο σώμα είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

Αντίστροφα, θα μπορούσε κανείς να "ανακαλύψει" την εξίσωση του Νεύτωνα (137) για ελεύθερο υλικό σημείο αν απλά απαιτούσε να είναι μιά διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς τη χρονική παράγωγο και η ίδια ως προς όλους τους αδρανειακούς (κατά Γαλιλαίο) παρατηρητές, δηλαδή αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου για κάθε σταθερό διάνυσμα **V**.

Πράγματι, θα ξεκινήσουμε με την γενική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς αδρανειακό παρατηρητή Σ

$$a\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + b\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{c} = 0 \tag{140}$$

με a, b σταθερές βαθμωτές ποσότητες και **c** σταθερό διάνυσμα και θα χρησιμοποιήσουμε την αναλλοιωτότητα της υπόθεσης για να προσδιορίσουμε τις σταθερές αυτές. Θα το κάνουμε σε δύο βήματα.

Βήμα 1: Μετά από μετασχηματισμό Γαλιλαίου (138) με σχετική ταχύτητα **V** οι τονούμενες ποσότητες θα ικανοποιούν την εξίσωση

$$a\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} + b\frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \mathbf{c} = a\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + b\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{c} + b\mathbf{V} = b\mathbf{V} = 0 \tag{141}$$

για κάθε **V**, εάν και μόνο εάν b=0.

Η εξίσωση επομένως απλοποιείται στην

$$a\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \mathbf{c} = 0\,. \tag{142}$$

Βήμα 2: Η παρουσία του σταθερού διανύσματος **c** στην εξίσωση υποδηλώνει ότι υπάρχει κάποιο σταθερό διάνυσμα, κάποια προεξάρχουσα κατεύθυνση στο Σύμπαν ή στο ελεύθερο σωμάτιο που περιγράφουμε. Δεδομένου ότι κάτι τέτοιο με το οποίο θα μπορούσε να ταυτιστεί το σταθερό διάνυσμα **c** δεν υπάρχει, πρέπει να πάρουμε αναγκαστικά **c**=0, και η εξίσωση γίνεται τελικά

$$a\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0\,. \tag{143}$$

Η σταθερά a ταυτίζεται με βάση κάποιο επιπλέον επιχείρημα με τη μάζα του σώματος, με τελική κατάληξη την εξίσωση του Νεύτωνα.

Το δεύτερο βήμα μπορεί να διατυπωθεί και διαφορετικά. Ανάμεσα στους αδρανειακούς παρατηρητές είναι και αυτοί που σχετίζονται με τον Σ με στροφές, που περιγράφονται από το μετασχηματισμό

$$x'_i = \mathcal{R}_{ij}x_j\,. \tag{144}$$

Στο στραμμένο σύστημα θα ικανοποιείται η εξίσωση

$$a\frac{d^2x'_i}{dt^2} + c_i = a\mathcal{R}_{ij}\frac{d^2x_j}{dt^2} + c_i = 0\,, \tag{145}$$

εάν και μόνο εάν $c_i = 0$, και η εξίσωση γίνεται τελικά η (143).

Κατά τους Γαλιλαίο και Νεύτωνα η Μηχανική είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (138). Επομένως, ο μετασχηματισμός της ταχύτητας ενός σώματος από σύστημα Σ σε Σ' με σχετική ταχύτητα **V** είναι

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}\,. \tag{146}$$

Α′.2 Η σχετικιστική μηχανική και οι μετασχηματισμοί Lorentz

Αμέσως μετά τη διατύπωσή τους έγινε σαφές οτι οι εξισώσεις του Maxwell του ελεύθερου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ήταν αναλλοίωτες [17] όχι κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, αλλά κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διαδιδόταν στο κενό με σταθερή ταχύτητα την ίδια για όλους τους παρατηρητές που σχετίζονταν με τυχόντα μετασχηματισμό Lorentz.

Η κατάσταση ήταν παράδοξη. Η μηχανική εθεωρείτο μέχρι τότε ότι ήταν αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, ενώ ο ηλεκτρομαγνητισμός κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Η άρση του παραδόξου έγινε με τη διαπίστωση ότι η Μηχανική έπρεπε να αλλάξει, ώστε να γίνει και αυτή αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz. Ετσι σήμερα, όπως έχει τονιστεί επανειλημένα σε αυτές τις σημειώσεις, ΟΛΟΙ οι νόμοι της Φύσης πιστεύουμε είναι αναλλοίωτοι ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Στις σημειώσεις αυτές "ανακαλύψαμε" τους σωστούς νόμους της Μηχανικής με τρόπο ανάλογο αυτού που περιέγραψα στο ακριβώς προηγούμενο υποκεφάλαιο για τη μηχανική του Νεύτωνα και τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Ξεκινήσαμε από το αξίωμα της Σχετικότητας του Einstein και τη γνώση για τη ταχύτητα του φωτός στη Θεωρία του Maxwell και καταλήξαμε στη σωστή σχετικιστική μηχανική.

[17] Χρησιμοποιούμε για λόγους απλότητας τον όρο αναλλοίωτες για τις παραπάνω εξισώσεις αντί του ορθότερου "συναλλοίωτες". Στην πραγματικότητα, μιλάμε για τανυστικές εξισώσεις της μορφής $\mathcal{A}_i = 0$. Με τη δράση κάποιου μετασχηματισμού $\mathcal{O}_{ij}$ οι εξισώσεις *αλλάζουν* σε $\mathcal{O}_{ij}\mathcal{A}_j = 0$. Δεν είναι δηλαδή αναλλοίωτες. Ωστόσο, η αλλαγή είναι τέτοια ώστε η ισχύς των εξισώσεων πριν $\mathcal{A}_i = 0$, να συνεπάγεται την ισχύ τους μετά $\mathcal{O}_{ij}\mathcal{A}_j = 0$. Οι εξισώσεις για τις οποίες ισχύουν αυτά λέμε οτι είναι "συναλλοίωτες" ως προς τους εν λόγω μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0 \tag{147}$$

είναι συναλλοίωτη κάτω από τις στροφές στο χώρο. Πράγματι, με τη δράση μιάς στροφής $\mathcal{R}_{ij}$ το αριστερό μέλος γίνεται

$$\frac{d^2x'_i}{dt^2} = \mathcal{R}_{ij}\frac{d^2x_j}{dt^2}\,, \tag{148}$$

με αποτέλεσμα η ισχύς της (147) να συνεπάγεται την ισχύ της $d^2x'_i/dt^2 = 0$ στο νέο σύστημα.

Αναφορές

[1] A. Einstein: "On the electrodynamics of moving bodies", στη συλλογή άρθρων "The principle of Relativity: a collection of original papers on the Special and General Theory of Relativity", Dover, 1953.

[2] "Subtle is the Lord...", A. Pais.

[3] "Relativity. The special and the general theory", A. Einstein. University paperbacks, 1970. Εξαιρετικό εισαγωγικό απλουστευμένο βιβλίο με καθαρή περιγραφή των βασικών εννοιών από τον κύριο δημιουργό της θεωρίας. Οι πρώτες 58 σελίδες του βιβλίου αναφέρονται στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

[4] "The meaning of Relativity", A. Einstein

[5] C. Kittel, W. Knight και M. Ruderman, "Mechanics", Berkeley Physics Course Vol. 1. Μεταφρασμένο και στα Ελληνικά.

[6] E. Purcel, "Electricity and Magnetism", Berkeley Physics Course Vol. 2. Μεταφρασμένο και στα Ελληνικά.

[7] J.S. Bell, "Speakable and unspeakable in quantum mechanics", Chapter 9, Cambridge University Press, 1993.