ΤΟ ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΗΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑΣ

Διδάσκων: Θεόδωρος Ν. Τομαράς

1 Ο παράγοντας κλίμακας και ο Νόμος του $Hubble$

Σύμφωνα με την Κοσμολογική Αρχή το Σύμπαν είναι σε μεγάλες κλίμακες ομογενές και ισότροπο[1]. Επίσης, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις το Σύμπαν διαστέλλεται. Η περιγραφή των χρονικά μεταβαλλόμενων αποστάσεων ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε γαλαξίες γίνεται με τη χρήση μιας συνάρτησης του χρόνου $a(t)$, που ονομάζεται "**παράγοντας κλίμακας**" (scale factor).

Φανταστείτε ένα μονοδιάστατο Σύμπαν. Ολοι οι "γαλαξίες" βρίσκονται πάνω στον άξονα των x και εμείς στην αρχή του άξονα. Φανταστείτε οτι κάποια χρονική στιγμή που ονομάζω t_0 οι γαλαξίες του θετικού ημιάξονα βρίσκονταν στις θέσεις $x_n \geq 0$, με $x_0 = 0$ η θέση του δικού μας Γαλαξία. Από το Νόμο του Hubble ξέρουμε οτι καθώς περνάει ο χρόνος οι αποστάσεις ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε γαλαξίες αλλάζει με τον ίδιο παράγοντα. Επομένως, οι αποστάσεις των γαλαξιών περιγράφονται με μία συνάρτηση $a(t)$ του χρόνου, που ονομάζεται "παράγοντας κλίμακας", και έχουν τη μορφή

$$\Delta s = a(t) \Delta x \tag{1}$$

με $a(t_0) = 1$. Οι γαλαξίες είναι "καρφωμένοι" σε σταθερά σημεία x_n ενός διαστελλόμενου χώρου. Σαν ειδική περίπτωση, η απόσταση από εμάς του τυχόντος γαλαξία στη θέση x_n είναι

$$s_n(t) = a(t) x_n \,, \quad s_n(t_0) = x_n \tag{2}$$

Οι τύποι αυτοί γενικεύονται τετριμμένα στο τριδιάστατο Σύμπαν και γίνονται

$$d(t) = a(t)\, r \,, \quad d(t_0) = r \tag{3}$$

όπου r είναι η ακτινική συντεταγμένη ενός γαλαξία τη χρονική στιγμή t_0 [2].

Από την (3) προκύπτει αμέσως ο *Νόμος του Hubble*. Πράγματι, η ακτινική ταχύτητα του γαλαξία στη θέση r είναι

$$v(t) = \dot{d}(t) = \dot{a}(t)\, r = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} a(t)\, r = H(t)\, d(t) \tag{4}$$

ανάλογη της απόστασής του από εμάς με "σταθερά" αναλογίας τη *σταθερά του Hubble*, που δίνεται συναρτήσει του παράγοντα κλίμακας από τη σχέση

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{5}$$

2 Το τέλειο ρευστό

Το περιεχόμενο του Σύμπαντος είναι σε πρώτη προσέγγιση ένα **ομογενές και ισότροπο ρευστό**, το οποίο περιγράφεται από την πυκνότητα ενέργειας $\epsilon(t) \equiv \rho(t)\, c^2$ και τη πίεση p(t). Επίσης, η θερμοκρασία του Σύμπαντος είναι T(t), η ίδια παντού σύμφωνα με τη Κοσμολογική Αρχή. Το ρευστό που αποτελεί το περιεχόμενο του Σύμπαντος αλλάζει από περίοδο σε περίοδο κατά τη χρονική του εξέλιξη. Μπορεί κάποια περίοδο να είναι με καλή προσέγγιση μή σχετικιστική ύλη,

[1] Οι ανομοιογένειες που παρατηρούμε σε μικρότερες κλίμακες θα πρέπει να εξηγηθούν σαν αποτέλεσμα θερμοδυναμικών και βαρυτικών διακυμάνσεων στο Νεαρό Σύμπαν.

[2] Επίσης, οι τύποι αυτοί γενικεύονται περαιτέρω και για μή Ευκλείδιους χώρους, π.χ. για χώρους με τοπολογία σφαίρας. Για παράδειγμα, η απόσταση τυχόντος σημείου (θ, ϕ) της σφαίρας από το Βόρειο Πόλο $\theta = 0$ είναι $d(t) = a(t)\, \theta$, με $a(t)$ η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή t.

ενώ άλλη να είναι ακτινοβολία. Οι διάφορες μορφές ύλης και ενέργειας περιγράφονται από την **καταστατική εξίσωση** $p = p(\rho)$ του ρευστού. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με ρευστά που έχουν

$$p(t) = w\rho(t)\, c^2 \tag{6}$$

όπου w=0 για **μή σχετικιστική ύλη**, w=1/3 για **ακτινοβολία** και w=-1 για **σκοτεινή ενέργεια.**

3 Η χρονική εξέλιξη του Σύμπαντος

3.1 Η Νευτώνεια θεωρία

Για τη μελέτη ολόκληρου του ορατού Σύμπαντος απαιτείται η χρήση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Ωστόσο, για τη μελέτη μιας μικρής περιοχής γύρω μας σήμερα η Νευτώνεια θεωρία είναι καλή προσέγγιση, αφού (α) οι ταχύτητες των κοντινών γαλαξιών είναι μικρές, (β) η συνεισφορά της ακτινοβολίας στην ενεργειακή πυκνότητα σήμερα αμελητέα και (γ) η βαρυτική ενέργεια της ύλης στη γειτονιά μας είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας της.

Επομένως, σε πρώτη φάση θα χρησιμοποιήσουμε την Νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας για την κατανόηση της μορφής των βασικών εξισώσεων, που περιγράφουν την εξέλιξη του Σύμπαντος. Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις "πλήρεις" εξισώσεις Friedmann που προκύπτουν από την Θεωρίας της Βαρύτητας του Einstein, και των οποίων, όπως θα δούμε, η μορφή διαφέρει ελάχιστα από αυτές της Νευτώνειας Θεωρίας. Το γεγονός ότι η μορφή των "πλήρων" εξισώσεων είναι παραπλήσια αυτής των προσεγγιστικών, οι συνέπειές τους μπορεί να είναι σημαντικά διαφορετικές, και για το λόγο αυτό η μελέτη των εφαρμογών θα γίνει με βάση τις εξισώσεις Friedmann.

Ας πάρουμε τη χρονική στιγμή t ένα "μικρό" σφαιρικό τμήμα του Σύμπαντος με τον Γαλαξία μας στο κέντρο και με ακτίνα $d(t) = a(t)\, r$.

• Η αλλαγές dE στην ενέργεια και dV στον όγκο του τμήματος αυτού το διάστημα $(t, t + dt)$ ικανοποιούν με βάση το πρώτο Νόμο της Θερμοδυναμικής τη σχέση

$$dE + p(t)\, dV = dQ = 0\,. \tag{7}$$

Μεταφορά θερμότητας ($dQ \neq 0$) προϋποθέτει διαφορά θερμοκρασίας, κάτι που δεν ισχύει στο ομογενές και ισότροπο Σύμπαν.

Ισοδύναμα, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{dE}{dt} + p(t)\frac{dV}{dt} = 0 \tag{8}$$

από την οποία, με αντικατάσταση των $E = \rho(t)c^2 4\pi d^3(t)/3$, $V = 4\pi d^3(t)/3$ και $d(t) = a(t)\, r$ παίρνω

$$c^2 \frac{d}{dt}(\rho(t)\, a^3(t)) + p(t)\frac{d}{dt}(a^3(t)) = 0 \tag{9}$$

• Ας πάρουμε ένα τυχόντα γαλαξία μάζας m στο όριο της παραπάνω σφαίρας ακτίνας $d(t)$. Η εξίσωση κίνησής του προκύπτει από το δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα και είναι

$$m\ddot{d}(t) = -G_N \frac{mM}{d^2(t)}\,. \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας την $M = 4\pi\rho(t)\, d^3(t)/3 = 4\pi\rho(t)\, a^3(t)\, r^3/3$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi}{3} G_N \rho(t) \tag{11}$$

• Η ολική ενέργεια E_{tot} του γαλαξία που θεωρήσαμε παραπάνω ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{2} m\dot{d}^2 - G_N \frac{mM}{d} = E_{tot} \tag{12}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{8\,\pi\, G_N}{3}\,\rho(t) = \frac{2\, E_{tot}}{m\, r^2 a^2(t)}\,, \tag{13}$$

3.2 Οι εξισώσεις Friedmann

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας εφαρμοζόμενη στη μελέτη του Σύμπαντος αλλάζει "λίγο" τις παραπάνω εξισώσεις (11) και (13). Οι πλήρεις εξισώσεις είναι

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\,\pi\,G_N}{3}\left(\rho(t) + 3\,\frac{p(t)}{c^2}\right) \tag{14}$$

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k\,c^2}{R_0^2\,a^2(t)} = \frac{8\,\pi\,G_N}{3}\,\rho(t)\,, \quad k = -1, 0, +1 \tag{15}$$

όπου R_0 είναι μιά σταθερά με διαστάσεις μήκους. Οι εξισώσεις (15) και (14) λέγονται εξισώσεις **Friedmann**, προς τιμήν αυτού που τις παρήγαγε πρώτος στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ) για τη μελέτη της χρονικής εξέλιξης του Σύμπαντος.

• Οι (11) και (14) διαφέρουν κατά τον όρο της πίεσης, που είναι μηδέν στη περίπτωση ρευστού μηδενικής πίεσης. Οι δε (13) και (15) ταυτίζονται με την αντιστοίχιση

$$\frac{2\,E_{tot}}{mr^2} = -\frac{k\,c^2}{R_0^2} \tag{16}$$

και με τον επιπλέον περιορισμό της ΓΘΣ οτι $k = -1, 0, +1$.

Η σταθερά k, που αντικαθιστά στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας την συνεχή παράμετρο E_{tot} της Νευτώνειας Θεωρίας, καθορίζει την τοπολογία του ομογενούς και ισότροπου χώρου. Συγκεκριμμένα, υπάρχουν ακριβώς τρείς ομογενείς και ισότροποι χώροι. Ο ένας είναι ο Ευκλείδειος χώρος τριών διαστάσεων και αντιστοιχεί στη τιμή $k = 0$. Αλλος είναι η τριδιάστατη γενίκευση της γνωστής μας διδιάστατης επιφάνειας σφαίρας με $k = +1$ και, τέλος, υπάρχει η τριδιάστατη γενίκευση του διδιάστατου υπερβολοειδούς σταθερής καμπυλότητας, που αντιστοιχεί στη τιμή $k = -1$. Τα σύμπαντα αυτά τα ονομάζουμε **επίπεδο, κλειστό** και **ανοικτό**, αντίστοιχα.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (αποστάσεις, καμπυλότητα, γεωδεσιακές,...) ενός τετραδιάστατου χωρόχρονου με ομογενή και ισότροπο τριδιάστατο χώρο καθορίζονται πλήρως από την τριάδα $(a(t), R_0, k)$, δηλαδή τον παράγοντα κλίμακας με τη σύμβαση $a(t_0) = 1$ και τις δύο σταθερές R_0 και k. Οι εξισώσεις Friedmann συνδέουν τη γεωμετρία του χωρόχρονου με το υλικό και ενεργειακό του περιεχόμενο.

3.3 Το πλήρες σύστημα εξισώσεων

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (14) και (15) παίρνετε την (9) [3]. Επομένως, τρεις ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις, που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη ενός ομογενούς και ισότροπου σύμπαντος είναι οι (15), (9) και (6), τις οποίες και ξαναγράφω εδώ:

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k\,c^2}{R_0^2\,a^2(t)} = \frac{8\,\pi\,G_N}{3}\,\rho(t)\,, \quad k = -1, 0, +1 \tag{17}$$

$$c^2\frac{d}{dt}(\rho(t)\,a^3(t)) + p(t)\frac{d}{dt}(a^3(t)) = 0 \tag{18}$$

$$p(t) = w\rho(t)\,c^2 \tag{19}$$

• Αντικαθιστώ στην (18) την (19) και παίρνω:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \tag{20}$$

που με ολοκλήρωση δίνει [4]

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{[a(t)]^{3(1+w)}} \tag{21}$$

[3] ΑΣΚΗΣΗ: ΚΑΝΤΕ ΤΟ!!

[4] ΑΣΚΗΣΗ: Να το αποδείξετε. Χρησιμοποιείστε τη σχέση $d\rho/dt = (d\rho/da)(da/dt) = \dot{a}(d\rho/da)$ για να μετατρέψετε την (20) σε εξίσωση για τη συνάρτηση $\rho = \rho(a)$.

όπου $\rho_0 = \rho(t_0)$.

Για τα τρία σημαντικότερα ρευστά που θα μας απασχολήσουν εδώ, τη μή σχετικιστική ύλη $(M, w = 0)$, την ακτινοβολία $(R, w = 1/3)$ και τη σκοτεινή ενέργεια $(V, w = -1)$, έχουμε αντίστοιχα

$$\rho_M(t) = \frac{\rho_{M,0}}{a^3(t)}\,, \quad \rho_R(t) = \frac{\rho_{R,0}}{a^4(t)}\,, \quad \rho_V(t) = \rho_{V,0} = \text{constant} \tag{22}$$

Εχουμε πει ότι σήμερα η ακτινοβολία έχει αμελητέα συνεισφορά στην συνολική ενεργειακή πυκνότητα του Σύμπαντος. Σύμφωνα όμως με την (22) καθώς πηγαίνουμε πίσω στο χρόνο η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει με ρυθμό γρηγορότερο από όλα τα άλλα συστατικά του Σύμπαντος. Ετσι, από κάποια εποχή και πριν η ακτινοβολία αποτελούσε το σημαντικότερο κομμάτι στο ενεργειακό ισοζύγιο του Σύμπαντος.

3.4 Η θερμοκρασία του Σύμπαντος

Η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι όπως γνωρίζετε από την θεωρία του μέλανος σώματος ανάλογη της τέταρτης δύναμης της θερμοκρασίας

$$u_R = \rho_R c^2 = \sigma_{SB}\, T^4\,. \tag{23}$$

Από την (22) έχουμε επίσης ότι

$$\rho_R c^2 = \frac{\rho_{R,0} c^2}{a^4(t)}\,. \tag{24}$$

Ο συνδυασμός των δύο αυτών σχέσεων οδηγεί στη σχέση

$$T(t) \sim \frac{1}{a(t)} \tag{25}$$

για τη χρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας της ακτινοβολίας. Καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται η θερμοκρασία του μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα προς το μέγεθός του. Σε όλο το διάστημα που η ακτινοβολία ήταν σε θερμοδυναμική ισορροπία με τα υπόλοιπα συστατικά του Σύμπαντος, η θερμοκρασία αυτή ήταν και η θερμοκρασία του Σύμπαντος. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι όλο το Σύμπαν κάποια περίοδο σε θερμοδυναμική ισορροπία με την ακτινοβολία είναι ο ρυθμός Γ των αντιδράσεων ανάμεσα στα συστατικά του μεταξύ τους και με την ακτινοβολία να είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό διαστολής του, που καθορίζεται από τη τιμή της σταθεράς του Hubble εκείνη την εποχή. Δηλαδή

$$\Gamma > H\,. \tag{26}$$

Διαφορετικά το Σύμπαν θα αραιώνει χωρίς οι αντιδράσεις ανάμεσα στα συστατικά του να προλαβαίνουν να το φέρουν σε θερμοδυναμική ισορροπία.

3.5 Η κρίσιμη πυκνότητα $\rho_c(t)$ και η τοπολογία του Σύμπαντος.

Εχουμε ορίσει την κρίσιμη πυκνότητα στη χρονική στιγμή t από τη σχέση

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3\,H^2(t)}{8\,\pi\,G_N} \tag{27}$$

και το ποσοστό $\Omega(t)$ της πραγματικής πυκνότητας ως προς την κρίσιμη από τη σχέση

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \tag{28}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές, η (17) γράφεται ισοδύναμα

$$-k = \frac{R_0^2\,\dot{a}^2(t)}{c^2}\,(1 - \Omega(t)) \tag{29}$$

και ειδικά για σήμερα

$$\frac{k\,c^2}{R_0^2} = H_0^2\,(\Omega_0 - 1) \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_0 = 1 &\quad \rightarrow \quad k = 0 \quad (euclidean) \\
\Omega_0 > 1 &\quad \rightarrow \quad k = +1 \;\; (sphere) \\
\Omega_0 < 1 &\quad \rightarrow \quad k = -1 \;\; (hyperboloid)
\end{aligned} \tag{31}$$

3.5.1 *Η Νευτώνεια ερμηνεία της κρίσιμης πυκνότητας.*

Η κρίσιμη πυκνότητα και ο τύπος που την δίνει μπορούν να παραχθούν με Νευτώνεια επιχειρηματολογία, όπως οι εξισώσεις του $Friedmann$. Η κρίσιμη πυκνότητα είναι ακριβώς αυτή για την οποία η ταχύτητα ενός "γαλαξία" μάζας m στη θέση r είναι ίση με τη ταχύτητα διαφυγής του από την βαρυτική έλξη της σφαίρας ακτίνας $d(t) = a(t)\, r$.

Πράγματι, η ολική ενέργεια της μάζας m με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής είναι $E_{tot} = K + V = 0$, οπότε έχουμε

$$\frac{1}{2} m \dot{d}^2 \equiv G_N \frac{m M_c}{d} \,. \tag{32}$$

Αντικαθιστώντας τις $d(t) = a(t)\, r$ και $M_c = (4/3)\pi d^3(t) \rho_c$ παίρνουμε

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G_N} \,. \tag{33}$$

4 Απλά κοσμολογικά μοντέλα

Η απόδειξη των εξισώσεων Friedmann έγινε χωρίς περιορισμό στο είδος του περιεχομένου του σύμπαντος. Περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη ενός οποιουδήποτε ομογενούς και ισότροπου σύμπαντος, με δεδομένο περιεχόμενο (ϱ, p). Ετσι, μπορεί κανείς να μελετήσει υποθετικά μοντέλα συμπάντων με περιεχόμενο της επιλογής του. Με το τρόπο αυτό αποκτά εμπειρία σχετικά με τη συμπεριφορά των λύσεων των εξισώσεων Friedmann και, επίσης, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με το σημερινό δικό μας Σύμπαν βγάζει συμπεράσματα για το περιεχόμενο του τελευταίου και πώς αυτό αλλάζει με το χρόνο.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα υποθετικών συμπάντων.

4.1 Το κενό σύμπαν

Μια πρώτη εφαρμογή των εξισώσεων αυτών είναι η μελέτη ενός σύμπαντος χωρίς ύλη, δηλαδή με $\rho = 0 = p$.

Στη περίπτωση αυτή έχουμε τις εξής δύο δυνατότητες:

(α) $k = 0$ και με βάση την (15) $a(t)$=σταθερά, δηλαδή χωρόχρονο Minkowski.

(β) $k = -1$, οπότε $a(t) = \pm\, ct/R_0$, δηλαδή ένα Σύμπαν διαστελλόμενο ή συστελλόμενο με σταθερό ρυθμό.

4.2 Ενα συστατικό με δεδομένο w και $k = 0$

Χρησιμοποιώντας την (21) η (17) γράφεται στη περίπτωση αυτή

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_0 a^{-3(1+w)} \,. \tag{34}$$

(i) Για $w \neq -1$ η γενική λύση με $a(t_0) = 1$ είναι

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\nu} \tag{35}$$

με

$$\nu = \frac{2}{3(1+w)} \tag{36}$$

Η σταθερά του $Hubble$ σήμερα $H_0 \equiv 1/t_H$ είναι

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t_0} = \frac{\nu}{t_0} \tag{37}$$

από την οποία έπεται

$$t_0 = \nu t_H \tag{38}$$

Ειδκότερα για τις περιπτώσεις υλοκρατίας και φωτοκρατίας, αντίστοιχα, ισχύει

$$\begin{array}{llll} w = 0 & \nu = \dfrac{2}{3} & a(t) = \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{2/3} & t_0 = \dfrac{2}{3}t_H \\ w = \dfrac{1}{3} & \nu = \dfrac{1}{2} & a(t) = \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^{1/2} & t_0 = \dfrac{1}{2}t_H \end{array} \tag{39}$$

(ii) Για $w = -1$ η λύση της (34) είναι

$$a(t) = e^{\pm H_0(t-t_0)}\,, \quad H_0 \equiv \sqrt{8\pi G\rho_0/3} \tag{40}$$

4.3 ΤΟ ΣΥΜΠΑΝ ΜΑΣ

Εστω οτι οι παρατηρήσεις των αστρονόμων δείχνουν οτι το Σύμπαν σήμερα αποτελείται από ακτινοβολία $\Omega_{R,0} = \rho_{R,0}/\rho_{c,0} = 8\pi G\rho_{R,0}/3H_0^2$, σκόνη $\Omega_{M,0} = 8\pi G\rho_{M,0}/3H_0^2$ και ενέργεια κενού $\Omega_{V,0} = 8\pi G\rho_{V,0}/3H_0^2$, που συνολικά ικανοποιούν τη σχέση

$$\Omega_0 = \Omega_{R,0} + \Omega_{M,0} + \Omega_{V,0} = 1\,. \tag{41}$$

Οπως είπαμε σε προηγούμενο μάθημα, το Σύμπαν μας σήμερα πιστεύουμε οτι αντιστοιχεί περίπου σε $\Omega_{V,0} \simeq 0.70\,, \Omega_{M,0} \simeq 0.30\,, \Omega_{R,0} \simeq 5 \times 10^{-5}$. Αυτό με βάση την (30) σημαίνει οτι $k = 0$ και από την (29) συμπεραίνουμε οτι $\Omega(t) = 1$ πάντα στο παρελθόν και στο μέλλον.

Υποθέτοντας οτι σε όλη την ιστορία του Σύμπαντος τα τρία συστατικά του αλληλεπιδρούν λίγο, ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε τις πιθανές μετατροπές από το ένα είδος σε άλλο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \\ &= \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{V,0} + \frac{\rho_{M,0}}{a^3} + \frac{\rho_{R,0}}{a^4}\right) \\ &= H_0^2\left(\Omega_{V,0} + \frac{\Omega_{M,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{R,0}}{a^4}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

οπότε, η εξίσωση κίνησης του παράγοντα κλίμακας του Σύμπαντος γίνεται

$$\frac{1}{2H_0^2}\,\dot{a}^2(t) + U_{eff}(a) = 0\,, \tag{43}$$

με

$$U_{eff}(a) = -\frac{1}{2}\left(\Omega_{V,0}a^2 + \frac{\Omega_{M,0}}{a} + \frac{\Omega_{R,0}}{a^2}\right) \tag{44}$$

που, για τη δεδομένη αρχική συνθήκη $a(t_0) = 1$, μας δίνει τη συνάρτηση $a(t)$ για κάθε χρονική στιγμή. Η εξίσωση (43) είναι ίδια με αυτήν που μελετήσατε στη Κλασική Μηχανική, όταν μελετήσατε τις δυνατές μονοδιάστατες κινήσεις σώματος σε δυναμικό. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο μπορούμε να μελετήσουμε τις δυνατές χρονικές εξελίξεις του Σύμπαντος.

4.3.1 Απλές ερωτήσεις

• Πότε η διαστολή του Σύμπαντος είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη;

Απάντηση: Οταν $-dU_{eff}/da > 0$ έχουμε επιτάχυνση και αντίστοιχα όταν $-dU_{eff}/da < 0$ επιβράδυνση.

• Για ποιές τιμές της a(t) είχαμε στο Σύμπαν μας "φωτοκρατία", για ποιές "υλοκρατία" και για ποιές έχουμε την υπερίσχυση του "κενού";

Απάντηση: Για μικρά a για τα οποία $\Omega_{R,0}/a^2 > \Omega_{M,0}/a$, ήτοι $a < 1.67 \times 10^{-4}$ έχουμε φωτοκρατία. Για μεγάλα a για τα οποία ισχύει $\Omega_{V,0}\, a^2 > \Omega_{M,0}/a$, δηλαδή $a > (3/7)^{1/3} \simeq 0.75$ έχουμε επικράτηση του κενού. Ενδιάμεσα έχουμε υλοκρατία.

• Σε ποιούς χρόνους αντιστοιχούν οι περίοδοι του ερωτήματος (β);

Απάντηση: Πρέπει να υπολογίσουμε πότε ο παράγοντας κλίμακας είχε τις τιμές $a_1 = 1.67 \times 10^{-4}$ και $a_2 = 0.75$. Μπορούμε να λύσουμε αριθμητικά την εξίσωση Friedmann και να βρούμε τη συνάρτηση $a(t)$ και απο εκεί τους χρόνους t_1 και t_2 για τους οποίους ισχύει $a(t_1) = a_1$ και $a(t_2) = a_2$ αντίστοιχα. Μπορούμε όμως να λύσουμε την άσκηση προσεγγιστικά ως εξής: Στην αρχή το Σύμπαν ήταν υπο καθεστώς φωτοκρατίας. Αρα, η εξίσωση για τον παράγοντα κλίμακας ήταν $\dot{a}^2/a^2 = H_0^2 \Omega_{R,0}/a^4$, της οποίας η λύση είναι $a(t)/a(t_0) = (t/t_0)^2$. Αρα, $t = t_0(a(t)/a(t_0))^2 = ...$

4.4 Υλοκρατία ή φωτοκρατία και k = 1 συνεπάγονται "Μεγάλη Κατάρρευση"!!

• **Φωτοκρατία.** Στη περίπτωση αυτή ισχύει $\rho \sim a^{-4}$ και η εξίσωση Friedmann παίρνει τη μορφή

$$\dot{a}^2 = \frac{A}{a^2} - \frac{kc^2}{R_0^2} \tag{45}$$

με A θετική σταθερά. Θέτοντας $y = a^2$ η εξίσωση αυτή γράφεται

$$\dot{y}^2 + \frac{4kc^2}{R_0^2} y = 4A^2 \tag{46}$$

και έχει για λύση την

$$a^2(t) = 2At - \frac{kc^2}{R_0^2} t^2 \tag{47}$$

με αρχική συνθήκη $1 = 2At_0 - kc^2 t_0^2/R_0^2$. Για k=0 αναπαράγομε τη συμπεριφορά $a(t) \sim \sqrt{t}$ του παράγοντα κλίμακας. Για k=-1 το a(t) αυξάνει συνεχώς, ενώ για k=1 έχουμε αρχικά αύξηση του a(t), στη συνέχεια μείωση, μέχρι τη στιγμή $t_C = 2AR_0^2/c^2$ κατά την οποία το Σύμπαν θα έχει συσταλεί σε μηδενική τιμή του $a(t_C) = 0$.

• **Υλοκρατία.** Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\rho \sim a^{-3}$ και η εξίσωση Friedmann γράφεται

$$\dot{a}^2 = \frac{B}{a} - \frac{kc^2}{R_0^2}\,. \tag{48}$$

με B θετική σταθερά. Η εξίσωση είναι λίγο πιό δύσκολη, αλλά η λύση έχει τα ίδια γενικά χαρακτηριστικά. Δηλαδή, για k=0 βρίσκουμε $a(t) \sim t^{2/3}$, για k=-1 το Σύμπαν διαστέλλεται συνεχώς, ενώ για k=1 το Σύμπαν διαστέλλεται μέχρι το μέγιστο μέγεθος $a_{max} = BR_0^2/c^2$ και στη συνέχεια συστέλλεται μέχρι να μηδενιστεί ο παράγοντας κλίμακας.