.

ΒΑΡΥΤΗΤΑ
ΚΑΙ
ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

Θεόδωρος Ν. Τομαράς

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Η ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

1 Εισαγωγή

Η τελική διατύπωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ) έγινε το 1905 από τον Albert Einstein [1]. Είχαν προηγηθεί σημαντικά βήματα και συνεισφορές ήδη από το τέλος του 19ου αιώνα από φυσικούς και μαθηματικούς όπως οι Larmor, Fitzgerald, Michelson, Morley, Lorentz, Poincaré, Minkowski, αλλά και άλλων λιγότερο γνωστών. Μιά ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα παρουσίαση της ιστορικής διαδρομής μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Abraham Pais "*Subtle is the Lord*" [2].

Κάτι που θα γίνεται όλο και πιό σαφές στην συνέχεια είναι ότι η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δεν ειναι απλά μια "θεωρία" όπως πολλές, που έχουν διατυπωθεί για να "ερμηνεύσουν" κάποια επί μέρους φαινόμενα. Η Θεωρία της Σχετικότητας έχει πολύ σημαντικές και αδιαφιλονίκητες συνέπειες. Περιγράφει ιδιότητες και συμμετρίες του χώρου και του χρόνου, της αρένας πάνω στην οποία διαδραματίζονται όλα τα φυσικά φαινόμενα, για σχετικά μικρές χωρικές αποστάσεις και χρονικά διαστήματα, τέτοια που να μπορούμε να αγνοήσομε την επίδραση της βαρύτητας. Μας διδάσκει γενικές ιδιότητες και συμμετρίες κάθε άλλου τύπου αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα έσχατα συστατικά της ύλης, έχει βαθειές συνέπειες σχετικές με την αντίληψή μας για το χώρο και το χρόνο και είναι εξαντλητικά επαληθευμένη πειραματικά [1].

Η ανεπάρκεια της μηχανικής του Νεύτωνα

Η θεωρία του Νεύτωνα δεν μπορεί να αποτελεί θεμελειώδη θεωρία περιγραφής της Φύσης, αφού για παράδειγμα είναι ασυμβίβαστη με κάθε φαινόμενο διάσπασης ενός σωματιδίου σε δύο ή και περισσότερα άλλα. Παραδείγματα τέτοιων αντιδράσεων διάσπασης είναι οι ${}^{238}_{92}U \rightarrow^{234}_{90} Th +^{4}_{2} He$, ${}^{13}_{7}N \rightarrow^{13}_{6} C + e^{+} + \nu_e$ και η $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, που λαμβάνουν χώρα σε αστέρες, σε πυρηνικούς αντιδραστήρες ή σε επιταχυντές, και που συμβαίνουν άλλοτε φυσικά και αυθόρμητα και άλλοτε τεχνητά και ελεγχόμενα.

Ας θεωρήσομε, για παράδειγμα, τη διάσπαση ενός ακίνητου πυρήνα ραδιενεργού ουρανίου και μετατροπή του σε πυρήνα θορίου με ταυτόχρονη εκπομπή ακτίνας-α (πυρήνας του στοιχείου ${}^{4}_{2}He$)

$$ {}^{238}_{92}U \rightarrow^{234}_{90} Th +^{4}_{2} He\,, \tag{1.1}$$

και στην οποία τα σωμάτια του δεύτερου μέλους παράγονται με μή μηδενικές ταχύτητες.

Κατά τον Νεύτωνα η ορμή και η ενέργεια ενός ελεύθερου σώματος μάζας M, που κινείται με ταχύτητα **v** δίδονται από τις σχέσεις

$$ \mathbf{p} = M\mathbf{v} \ , \quad E = \frac{1}{2}Mv^2\,, \tag{1.2}$$

αντίστοιχα. Επίσης, ήδη από την εποχή του Νεύτωνα είχε διαπιστωθεί ότι σε όλα τα πειράματα και τις παρατηρήσεις, που γίνονταν μέχρι τότε, τόσο η ενέργεια όσο και η ορμή ενός κλειστού συστήματος διατηρούνται. Ομως, η παρατήρηση στη Φύση διασπάσεων όπως οι παραπάνω οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι είτε (α) ο παραπάνω τύπος για την ενέργεια δεν είναι σωστός, είτε (β) ότι η ενέργεια δεν διατηρείται. Πράγματι, αν επιμείνει κανείς στην άποψη ότι κάποια ποσότητα, που ονομάζεται ενέργεια, πρέπει να διατηρείται *σε κάθε φαινόμενο*, τότε η έκφραση (2.1) για την ενέργεια δεν μπορεί να είναι σωστή, αφού πριν τη διάσπαση η τιμή της είναι μηδέν (θεωρείστε ότι το αρχικό σωμάτιο ήταν ακίνητο), ενώ η τιμή της μετά είναι θετική, αφού τα προϊόντα της διάσπασης έχουν εν γένει μή μηδενικές ταχύτητες. Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι σχέσεις (2.1) είναι σωστές, αλλά η ενέργεια σε συστήματα και αντιδράσεις διάσπασης όπως οι παραπάνω δεν διατηρείται. Μιά τέτοια πρόταση δεν είναι ικανοποιητική για δύο τουλάχιστον λόγους. Πρώτον, γιατί δημιουργεί το ερώτημα πώς συμβαίνει να διατηρείται με τόση ακρίβεια σε τόσα και τόσα άλλα συστήματα, που έχουν μελετηθεί. Συστήματα τόσο διαφορετικά όσο τα μηχανικά συστήματα της καθημερινής μας ζωής, σε κρούσεις σωμάτων ή κατά τη κίνηση των πλανητών του ηλιακού συστήματος σέβονται την διατήρησή της. Αυτό δεν μπορεί να είναι σύμπτωση. Δεύτερον, διότι δεν είναι εύκολο να εγκαταλείψουμε τους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής, αφού είναι συνέπειες της ομοιογένειας του χρόνου και του χώρου μας, αντίστοιχα. Συγκεκριμμένα, πιστεύουμε οτι οι νόμοι της Φύσης δεν αλλάζουν από θέση σε θέση στο Σύμπαν, ή από τη μία χρονική στιγμή στην άλλη [2]. Πιστεύουμε, οτι δεν υπάρχουν

[1] Μέχρι σήμερα τα πειράματα είναι όλα σε απόλυτη συμφωνία με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Αυτό φυσικά δεν σημαίνει ότι στο μέλλον, όταν τα όρια της επιστημονικής γνώσης επεκταθούν ακόμα πιό πέρα, αποκλείεται να ανακαλυφθούν αποκλίσεις από τις προβλέψεις της ΕΘΣ. Για παράδειγμα, μέχρι σήμερα έχομε διεισδύσει στη δομή της ύλης μέχρι αποστάσεις της τάξης του $10^{-16}cm$. Υπάρχουν κάποια θεωρητικά επιχειρήματα και εικασίες σχετιζόμενες με τη δομή της *κβαντικής βαρύτητας*, που προβλέπουν αποκλίσεις από την ΕΘΣ σε αποστάσεις μικρότερες από $10^{-33}cm$. Ο τελικός κριτής, φυσικά, είναι πάντα το πείραμα και η παρατήρηση.

[2] Τουλάχιστον για νόμους και φαινόμενα, που δεν επηρρεάζονται από τη διαστολή του Σύμπαντος.

προεξάρχουσες θέσεις ή χρονικές στιγμές στη Φύση. Πείραμα που εκτελείται σήμερα εδώ και το ίδιο πείραμα με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, που επαναλαμβάνεται κάπου αλλού και σε κάποια άλλη χρονική στιγμή, δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. Αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Noether, έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη τεσσάρων ποσοτήτων, της ενέργειας και των τριών συνιστωσών της ορμής, που είναι σταθερές της κίνησης, δηλαδή δεν αλλάζουν τιμές κατά τη χρονική εξέλιξη οποιουδήποτε φυσικού συστήματος. Αρα, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι υπάρχουν και διατηρούνται κάποιες ποσότητες, που ονομάζομε ενέργεια και ορμή. Το μόνο ζητούμενο επομένως είναι να βρούμε τις σωστές εκφράσεις τους και με αυτές να αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (2.1) της Θεωρίας του Νεύτωνα.

'Ενα άλλο επιχείρημα που δείχνει την ανεπάρκεια της Θεωρίας του Νεύτωνα έχει να κάνει με το φώς. Τα φωτόνια, τα κβάντα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, είναι σωμάτια με μηδενική μάζα και κινούνται με πεπερασμένη ταχύτητα, την ταχύτητα του φωτός. Επίσης, τα φωτόνια μεταφέρουν ενέργεια και ορμή, αφού για παράδειγμα, το φως του ήλιου, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά δέσμη φωτονίων, μας ζεσταίνει. Το σώμα μας απορροφά την ενέργειά τους και ζεσταίνεται. Ωστόσο, αυτό είναι σε αντίθεση με τις σχέσεις (2.1) του Νεύτωνα, σύμφωνα με τις οποίες τα φωτόνια έχοντας $M = 0$ θα έπρεπε να έχουν μηδενική ενέργεια και ορμή.

Το συμπέρασμα από τα παραπάνω και πολλά άλλα παραδείγματα είναι ότι η Θεωρία του Νεύτωνα δεν κάνει σωστή περιγραφή και αφήνει ανεξήγητα μια σειρά από φυσικά φαινόμενα της καθημερινότητας. Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η βήμα-βήμα άρση των παραπάνω "παραδόξων", η διατύπωση των σωστών εκφράσεων για την ενέργεια και την ορμή τυχόντος συστήματος σωμάτων και η εξοικείωση με τους νόμους της Σχετικιστικής Μηχανικής, με τη γενική μορφή όλων των Νόμων της Φυσικής, καθώς και με την εικόνα για τη δομή του χώρου και του χρόνου, που θα προκύψει.

Το μή σχετικιστικό όριο: Οπως θα παρατηρούμε επανειλλημένα στη συνέχεια, *η Σχετικιστική Μηχανική έχει ως όριο την Νευτώνεια για συστήματα σωμάτων με ταχύτητες πολύ μικρότερες από αυτήν του φωτός*.

Η επιβεβαίωση, μάλιστα, της ιδιότητας αυτής αποτελεί και έναν έλεγχο της ορθότητας των σχέσεων της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Ο λόγος είναι ότι η Θεωρία του Νεύτωνα έχει επαληθευθεί με μεγάλη ακρίβεια αλλά και γνωστές αποκλίσεις σε πληθώρα φαινομένων. Στις βολές σωμάτων στο πεδίο βαρύτητας της Γης, στη κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ηλιο, σε κρούσεις μαζών με μικρές σχετικά ταχύτητες, στη μελέτη των ταλαντώσεων ενός στερεού, στη μελέτη των ενεργειακών σταθμών του ατόμου του υδρογόνου και σε πολλά άλλα. Η κλασική ή η κβαντική μελέτη όλων αυτών των συστημάτων, με κοινό χαρακτηριστικό το ότι πρόκειται για συστήματα σωμάτων, που δεν μετατρέπονται σε άλλα και που κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός, βασίζεται σε πρώτη προσέγγιση στους τύπους ενέργειας και ορμής της Νευτώνειας θεωρίας. Κατά συνέπεια, η Σχετικιστική Μηχανική στην οποία θα καταλήξουμε θα πρέπει να είναι σύμφωνη με τη Νευτώνεια μέσα στο πεδίο εφαρμογής της τελευταίας.

Οπως θα γίνει σαφές στο κεφάλαιο αυτό, η Σχετικιστική Μηχανική έχει διευρυμένο πεδίο εφαρμογής σε σχέση με τη Νευτώνεια. Ισχύει για όλα τα συστήματα σωμάτων συμπεριλαμβανομένων και σωμάτων, που μπορούν να αλλάζουν φύση, ή και να κινούνται ακόμα και με την ταχύτητα του φωτός. Τέλος, οι προβλέψεις της είναι συμβιβαστές με αυτές της Νευτώνειας με μετρήσιμες και επιβεβαιωμένες αποκλίσεις από την τελευταία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (α) Να εκτιμήσετε τη μέση ταχύτητα της Γης γύρω από τον Ηλιο.
(β) Να κάνετε μια εκτίμηση της ταχύτητας του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου.

2. (α) Με τί ταχύτητα κινούνται τα φωτόνια;
(β) Με τί ταχύτητα απομακρύνονται από εμάς οι πιό μακρινοί γαλαξίες, που έχουν παρατηρηθεί;

2 Τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

2.1 Τα αξιώματα

Η παρουσίαση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ) που ακολουθεί, βασίζεται στο μνημειώδες άρθρο που δημοσίευσε ο Einstein το 1905 με τίτλο "*On the electrodynamics of moving bodies*" [1]. Δεν θα περιγραφούν τα πειραματικά και θεωρητικά βήματα, που προηγήθηκαν της τελικής διατύπωσης, που έγινε στο άρθρο αυτό. Αντίθετα, η ΕΘΣ θα θεμελιωθεί σε δύο αξιώματα, που αφ' ενός επεκτείνουν την προηγούμενη εμπειρία της θεωρίας του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα και αφ' ετέρου συνοψίζουν τα αποτελέσματα πειραμάτων, όπως αυτά των Michelson και Morley, σχετικών με τη διάδοση και τη ταχύτητα του φωτός. Το όλο οικοδόμημα της Σχετικιστικής Μηχανικής θα αναπτυχθεί ως λογική και άμεση συνέπεια αυτών των δύο αξιωμάτων.

1. Αξίωμα της Σχετικότητας του Einstein: Οι Νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

2. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή ως προς κάθε αδρανειακό παρατηρητή. Οποιος από αυτούς μετρήσει την ταχύτητα του φωτός στο κενό θα βρεί την τιμή $c \simeq 2.99792458 \times 10^8 m/sec$ [3]. Ισοδύναμα, η ταχύτητα του φωτός στο κενό δεν εξαρτάται από την κίνηση της πηγής που το εκπέμπει.

Το Αξίωμα της Sχετικότητας του Einstein είναι γενίκευση του αντίστοιχου *αξιώματος του Γαλιλαίου*, το οποίο αναφερόταν μόνο στους Νόμους της Μηχανικής, και όχι γενικά σε όλους τους νόμους της Φυσικής. Στο Παράρτημα Α μπορείτε να βρείτε μια σύντομη επανάληψη των βασικών υποθέσεων και συμμετριών της μηχανικής των Γαλιλαίου - Νεύτωνα.

2.2 Αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Τί είναι οι *αδρανειακοί παρατηρητές* που αναφέρονται στα παραπάνω αξιώματα;

Ορισμός: Αδρανειακοί παρατηρητές ή ισοδύναμα αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι εκείνα ως προς τα οποία ένα ελεύθερο σώμα, δηλαδή ένα σώμα πάνω στο οποίο ασκείται μηδενική συνισταμένη εξωτερική δύναμη, κινείται με σταθερή ταχύτητα.

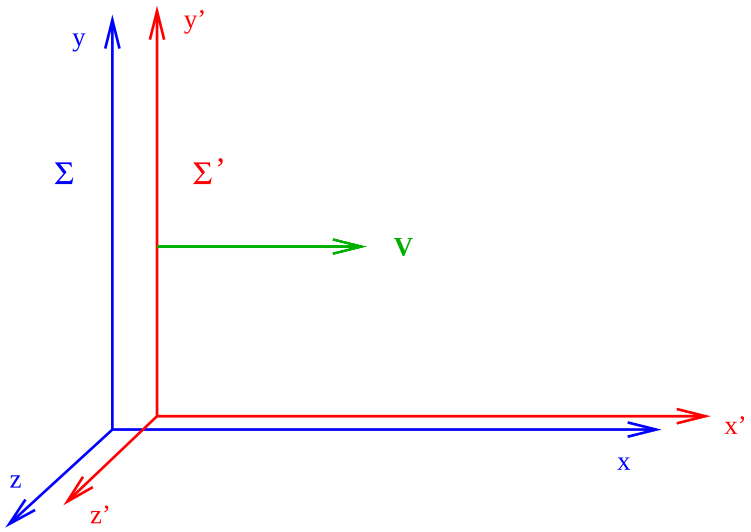
Φανταστείτε ένα σώμα κάπου στο "κενό" διάστημα, δηλαδή κάπου μακρυά από όλα τα ουράνια σώματα, τους αστέρες, τους γαλαξίες και τα σμήνη γαλαξιών, μακρυά από οτιδήποτε θα μπορούσε να ασκήσει δύναμη πάνω του. Ενα τέτοιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί με εξαιρετικά καλή προσέγγιση ελεύθερο. Φανταστείτε τώρα έναν παρατηρητή, επίσης εγκατεστημένο με το εργαστήριό του στην περιοχή εκείνη του διαστήματος, να παρατηρεί την κίνηση του σώματος αυτού σε ένα σύστημα αξόνων "στερεωμένο" στους "απλανείς αστέρες". Με βάση την εμπειρία μας περιμένουμε ότι ο παρατηρητής αυτός θα βλέπει το σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Επομένως, το "πρότυπο" αυτό σύστημα αναφοράς το στερεωμένο στους απλανείς αστέρες είναι με βάση τον παραπάνω ορισμό αδρανειακό. Κάθε άλλο σύστημα που διαφέρει από το πρότυπο ως προς την θέση της αρχής των αξόνων, ή τον προσανατολισμό του είναι επίσης αδρανειακό, αφού κάθε ελεύθερο σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς όλα αυτά. Τέλος, κάθε σύστημα αναφοράς (παρατηρητής) που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς οποιοδήποτε από τα παραπάνω, επίσης παρατηρεί το ελεύθερο σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Επομένως και αυτά είναι αδρανειακά. Σε ό,τι αφορά την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας το "ιδεατό" πρότυπο σύστημα των απλανών αστέρων και όλα τα μετατοπισμένα, στραμμένα και με αυθαίρετη σχετική ταχύτητα ως προς αυτό συστήματα, αποτελούν το πήρες σύνολο των "αδρανειακών" συστημάτων. Αυτά είναι όλα τα αδρανειακά συστήματα [4].

---

[3] Από το 1983 και για να αποφεύγονται σφάλματα που υπήρχαν σε προηγούμενους ορισμούς, η μονάδα μήκους "ένα μέτρο" (1 m) ορίζεται ως η απόσταση που διανύει το φώς στο κενό σε χρόνο 1/299792458 sec. Εκτενή περιγραφή των προτύπων και των μονάδων μέτρησης μπορείτε να βρείτε στην παράγραφο 1-3 του βιβλίου "Πανεπιστημιακή Φυσική", H.D. Young, Εκδόσεις Παπαζήση 1994.

[4] Στην Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) θα επανέλθουμε με μια κριτική ανάλυση του θέματος των συστημάτων αναφοράς. Ο στόχος της ΓΘΣ είναι η διατύπωση των Νόμων της Φυσικής με τρόπο που να ισχύουν ως προς όλους τους παρατηρητές, απαλλαγμένων δηλαδή από οποιαδήποτε αναφορά σε αδρανειακά ή με οποιοδήποτε τρόπο "προνομιούχα"

'Οποτε στη συνέχεια αναφερόμαστε σε δύο αδρανειακούς παρατηρητές με μή μηδενική σχετική ταχύτητα, θα χρησιμοποιούμε το διάγραμμα του Σχήματος 1. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα προσανατολίζομε τους χωρικούς άξονες των δύο συστημάτων ώστε να είναι παράλληλοι μεταξύ τους, και με τρόπο ώστε η σχετική ταχύτητά τους να είναι στην κοινή κατεύθυνση x.



Σχήμα 1: Σχηματική παράσταση δύο αδρανειακών συστημάτων $\Sigma\{x, y, z\}$ και $\Sigma'\{x', y', z'\}$, με σχετική ταχύτητα V κατά την κοινή κατεύθυνση x

Υπάρχουν *μή αδρανειακά συστήματα αναφοράς*; Φυσικά και υπάρχουν. Τα περισσότερα που μπορεί να φανταστεί κανείς είναι μή αδρανειακά. Για παράδειγμα, ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι μή αδρανειακό. Πράγματι, ένα ελεύθερο σώμα ακίνητο ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή φαίνεται να εκτελεί κυκλική κίνηση ως προς σύστημα περιστρεφόμενο σε σχέση με το αδρανειακό και με άξονα περιστροφής που δεν περιέχει το εν λόγω σώμα. Επίσης, ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής ορίζει ένα μή αδρανειακό σύστημα αφού ένα ελεύθερο σώμα έχει ως προς αυτόν μή μηδενική επιτάχυνση. Ακόμα, το σύστημα αναφοράς ενός εργαστηρίου φυσικής, δηλαδή ένα σύστημα αναφοράς στερεωμένο στη Γη είναι μή αδρανειακό λόγω της περιστροφής της Γης περί τον άξονά της, λόγω της κίνησής της Γης περί τον Ηλιο, λόγω της περιστροφικής κίνησης του όλου Ηλιακού συστήματος γύρω από το κέντρο του Γαλαξία μας, ή λόγω της κίνησης του Γαλαξία σε σχέση με το τοπικό σμήνος γαλαξιών.

Ωστόσο, για επίγεια πειράματα μελέτης φαινομένων στα οποία μπορούμε να αγνοήσομε την επίδραση της βαρύτητας και την κίνηση της Γης, το σύστημα οποιουδήποτε γήϊνου εργαστηρίου είναι με καλή προσέγγιση αδρανειακό. Κατά τη μελέτη ενός φαινομένου μικρής χρονικής διάρκειας, η ταχύτητα του εργαστηρίου ως προς το "πρότυπο" σύστημα των απλανών αστέρων μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και επομένως το σύστημα του εργαστηρίου είναι αντιστοίχως με καλή προσέγγιση αδρανειακό. Τέλος, ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα, ορίζει επίσης ένα κατά προσέγγιση αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Γι' αυτό και μερικές φορές θα χρησιμοποιούμε ένα σχήμα όπως το Σχήμα 2 και θα αναφερόμαστε στη Γη και στο τρένο, προκειμένου να έχουμε εποπτεία δύο αδρανειακών συστημάτων με μή μηδενική σχετική ταχύτητα.

Τα αδρανειακά συστήματα είναι εξιδανικεύσεις ή προσεγγίσεις μή αδρανειακών συστημάτων. Ωστόσο, κατέχουν ξεχωριστή θέση στη φυσική διότι *οι Νόμοι της Φυσικής έχουν ως προς αυτά την πιό απλή μορφή*. Γενικά, η μορφή ενός νόμου σε τυχόν μη αδρανειακό σύστημα προκύπτει από τον νόμο σε αδρανειακό σύστημα με μετασχηματισμό των συντεταγμένων που οδηγεί στο μή αδρανειακό [5].

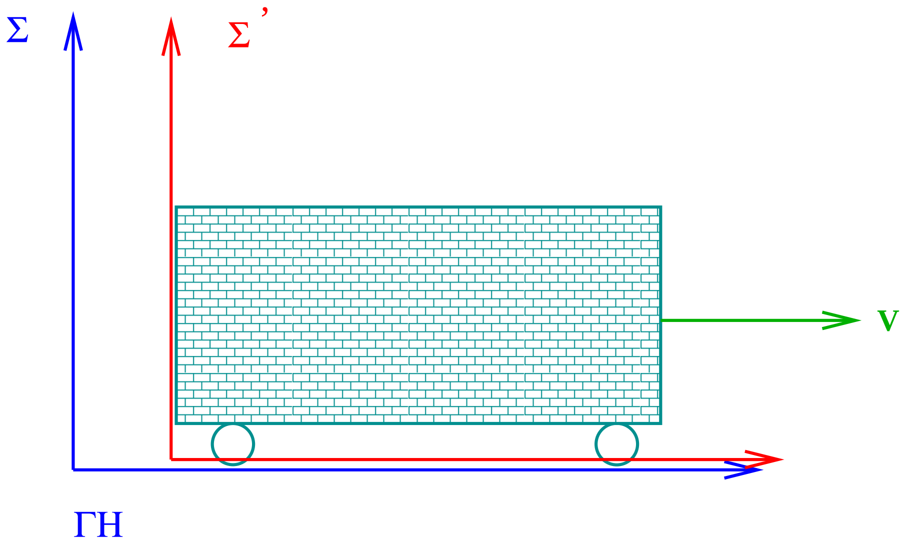
συστήματα συντεταγμένων.

[5]Για παράδειγμα, ας εφαρμόσουμε αυτή τη συνταγή για να γράψομε την μη σχετικιστική εξίσωση κίνησης υλικού σημείου μάζας m ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς Σ. Αφετηρία είναι η εξίσωση κίνησης

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{F}' \,. \tag{2.1}$$

του σώματος αυτού υπό την επίδραση δύναμης $\mathbf{F}'$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ'. Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων του υλικού σημείου, που συνδέει το Σ' με το σύστημα Σ, που περιστρέφεται ως προς το Σ' με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, είναι

$$r_i = R_{ij}(t) r'_j \,. \tag{2.2}$$



Σχήμα 2: Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς με σχετική ταχύτητα V

2.3 Οι Νόμοι της Φυσικής και η Αρχή της Σχετικότητας

Οι Νόμοι της Φυσικής έχουν κατά κανόνα τη μορφή διαφορικών εξισώσεων. Ετσι, σύμφωνα με την Αρχή της Σχετικότητας του Einstein, οι εξισώσεις κίνησης των σωμάτων και των πεδίων στη Φύση έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Ο γνωστός σας και πειραματικά επιβεβαιωμένος δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, ότι δηλαδή ένα ελεύθερο σώμα κινείται ευθυγράμμως και ισοταχώς, γράφεται στη μορφή

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \tag{2.5}$$

και ισχύει για κάθε αδρανειακό παρατηρητή Σ. Η ταχύτητα $\mathbf{v}'$ του σώματος που μετράει κάποιος άλλος αδρανειακός παρατηρητής Σ’ είναι διαφορετική από την $\mathbf{v}$, ο χρόνος t' ως προς τον Σ’ κυλάει, όπως θα δούμε, διαφορετικά από τον t. Ωστόσο, και ως προς τον Σ’ ισχύει ο ίδιος νόμος

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = 0\,, \tag{2.6}$$

δηλαδή η ταχύτητα του ελεύθερου σώματος είναι και ως προς τον Σ’ σταθερή.

Ενα άλλο παράδειγμα. Οι εξισώσεις Maxwell που περιγράφουν την δυναμική ενός συστήματος ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων σε αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετράνε σε κάποια θέση του χώρου και σε κάποια χρονική στιγμή δύο διαφορετικοί παρατηρητές θα είναι διαφορετικά. Η ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των φορτίων που θα μετρούν κάθε χρονική στιγμή οι παρατηρητές θα είναι επίσης εν γένει διαφορετικές. Οι νόμοι όμως που διέπουν την δυναμική τους, δηλαδή οι εξισώσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά και καθορίζουν την χρονική εξέλιξη του συστήματος των σωματίων και των πεδίων, έχουν την ίδια *ακριβώς* μορφή στα δύο συστήματα.

Ο 3×3 πίνακας στροφής είναι, ως γνωστόν, ορθογώνιος ($RR^T = I$) και δίνεται από τη σχέση $R(t) = \exp(i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}t)$, με τους τρεις γεννήτορες των στροφών L_j να έχουν στοιχεία $(L_j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl}$. Παραγωγίζοντας τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων ως προς το χρόνο t, κοινό στα Σ και Σ’ σύμφωνα με τη Νευτώνεια μηχανική, και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\dot{R} = i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L})R$ προκύπτει η

$$R_{ij}v'_j = v_i + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})_i\,. \tag{2.3}$$

Παραγώγιση της τελευταίας ως προς t, με χρήση της ίδιας καθώς και της (2.1) για απαλοιφή της $\boldsymbol{v}'$, καταλήγει κανείς στην γνωστή εξίσωση

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,, \tag{2.4}$$

όπου $F_i = R_{ij}F'_j$. Στο δεύτερο μέλος εμφανίζεται πέραν της πραγματικής εξωτερικής δύναμης $\mathbf{F}$, που ενδεχομένως δρά στο σώμα, η “φανταστική” δύναμη $\mathbf{F}_{Coriolis} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$, καθώς και η επίσης φανταστική “φυγόκεντρος”, που είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας. Επομένως, η ταχύτητα ενός **ελεύθερου** σώματος ($\mathbf{F} = 0$) ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς δεν είναι σταθερή. Το σώμα έχει μη μηδενική επιτάχυνση, οφειλόμενη στις δύο φανταστικές δυνάμεις, συνέπεια του γεγονότος ότι το σύστημα αναφοράς Σ είναι μή αδρανειακό. Οπως παρατηρείτε, οι δυνάμεις αυτές εξαφανίζονται για $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Συνέπεια των παραπάνω είναι το ότι δεν είναι δυνατόν με πειράματα, που εκτελούμε σε ένα αδρανειακό σύστημα να αποφανθούμε αν αυτό κινείται ή όχι και να μετρήσομε την ταχύτητά του, ας πούμε ως προς το πρότυπο αδρανειακό σύστημα αναφοράς των απλανών αστέρων. Για παράδειγμα, με πειράματα μέσα σε κλειστό βαγόνι τρένου που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη Γη δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν κινούμαστε σε σχέση με τη Γη ή όχι.

Ως γενικό κανόνα ας αναφέρουμε εδώ ότι αν οι Νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι ως προς ένα σύνολο μετασχηματισμών, αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν τους Νόμους αυτούς δεν περιέχουν τις παραμέτρους των μετασχηματισμών, και κατά συνέπεια οι παράμετροι αυτές δεν είναι παρατηρήσιμες ποσότητες. Στο πνεύμα αυτό, μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις της Φύσης από ένα αδρανειακό σύστημα σε άλλο, οι νέες εξισώσεις δεν περιέχουν τη σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων, και έτσι η ταχύτητα αυτή δεν μπορεί να προσδιοριστεί με πειράματα σε οποιοδήποτε σύστημα.

Cartoon with a spaceship and an observer in it having the same Maxwell equations as the observer outside.

Αντίστροφα, η Αρχή της Σχετικότητας του Einstein επιβάλλει περιορισμούς και μας καθοδηγεί στην αναζήτηση άγνωστων μέχρι σήμερα νόμων της Φύσης. Η ερευνητική προσπάθεια στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων για την ανακάλυψη και διατύπωση των θεμελιωδών νόμων που διέπουν την δυναμική των έσχατων συστατικών της ύλης και των φορέων των αλληλεπιδράσεων, διευκολύνεται σημαντικά από το γεγονός ότι νόμοι αυτοί δεν είναι αυθαίρετοι, αλλά ότι αποδεκτοί είναι μόνο εκείνοι, που υπακούουν στην Αρχή της Σχετικότητας και έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

'Ετσι, για παράδειγμα, όπως θα δούμε παρακάτω, η μηχανική των Γαλιλαίου-Νεύτωνα δεν σέβεται την Αρχή της Σχετικότητας του Einstein. Αρα δεν μπορεί να αποτελεί θεμελιώδη θεωρία της Φυσικής. Απο την άλλη όμως, όπως αναφέρθηκε ήδη, περιγράφει με εξαιρετική ακρίβεια την κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο, ή την τροχιά βλήματος στο βαρυτικό πεδίο της γης. Επομένως, η μηχανική του Νεύτωνα θα πρέπει να είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της Σχετικιστικής Μηχανικής, με την οποία θα την αντικαταστήσουμε, όταν η τελευταία εφαρμόζεται στην μελέτη συστημάτων σωμάτων, που κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός.

2.4 Η ταχύτητα του φωτός - Συγχρονισμός ρολογιών

Το πρώτο αξίωμα είναι μια εύκολα αποδεκτή γενίκευση αντίστοιχου αξιώματος των Γαλιλαίου και Νεύτωνα, που αναφερόταν, όπως αναφέρθηκε ήδη, μόνο στους νόμους της μηχανικής. Το δεύτερο αξίωμα όμως εκπλήσσει, αφού μοιάζει να είναι σε προφανή αντίθεση με "εδραιωμένη" καθημερινή εμπειρία.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε το σκηνικό του Σχήματος 2 και ας πάρουμε ένα σώμα να κινείται μέσα στο τρένο με ταχύτητα v' ως προς αυτό και προς τα δεξιά. 'Ετσι, σε χρόνο Δt το σώμα διανύει απόσταση $v'\Delta t$ μέσα στο τρένο. Ως προς τον παρατηρητή της αποβάθρας από την άλλη μεριά, στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt το τρένο έχει μετατοπιστεί σε σχέση με την αποβάθρα κατά $V\Delta t$. Συνολικά, ως προς την αποβάθρα το σώμα θα έχει διανύσει απόσταση $(v' + V)\Delta t$. Η ταχύτητά του, επομένως, ως προς τον παρατηρητή στην αποβάθρα θα είναι

$$v = v' + V\,, \tag{2.7}$$

ο γνώριμός σας κανόνας σύνθεσης ταχυτήτων (βλέπε Παράρτημα Α).

Ας πάρομε τώρα αντί για το σώμα το μέτωπο ενός φωτεινού σήματος. Αν c' είναι η ταχύτητα του μετώπου του σήματος αυτού ως προς το τρένο, η ταχύτητά του ως προς την αποβάθρα θα είναι σύμφωνα με τα παραπάνω

$$c = c' + V \neq c'\ ! \tag{2.8}$$

Πώς είναι δυνατόν, λοιπόν, να ισχυρίζεται κάποιος οτι η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή τόσο ως προς τον παρατηρητή στο τρένο, όσο και ως προς τον παρατηρητή στην αποβάθρα; Πού είναι το λάθος στην παραπάνω απόδειξη;

Οπως θα δούμε παρακάτω, το "λάθος" στην παραπάνω απόδειξη είναι η "αθώα" και πολύ συνηθισμένη υπόθεση οτι το χρονικό διάστημα Δt είναι το ίδιο για τον παρατηρητή στο τρένο και για τον παρατηρητή στην αποβάθρα. Για να μπορούν δύο παρατηρητές να συγκρίνουν χρόνους και χρονικά διαστήματα πρέπει πρώτα να συγχρονίσουν τα ρολόγια τους. Αυτό θα γινόταν πολύ εύκολα αν η ταχύτητα διάδοσης του φωτός ήταν άπειρη. Τότε πράγματι, ο συγχρονισμός των ρολογιών όλων των παρατηρητών, αδρανειακών και μή, γίνεται ως εξής: κάποιος από αυτούς ανάβει ένα φώς όταν το ρολόϊ του δείχνει 12:00. Ακαριαία βλέπουν το φως όλοι οι παρατηρητές και ρυθμίζουν και αυτοί τα ρολόγια τους να δείχνουν 12:00, όπως έχουν συμφωνήσει. Ετσι, τα ρολόγια όλων των παρατηρητών δείχνουν την ίδια ένδειξη, και τα ίδια χρονικά διαστήματα ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε γεγονότα.

Βασική υπόθεση της Νευτώνειας Μηχανικής είναι ότι η ταχύτητα του φωτός, ή πιό γενικά η ταχύτητα διάδοσης πληροφορίας είναι άπειρη. Ετσι, σύμφωνα με τη Νευτώνεια Μηχανική υπάρχει ένας χρόνος για όλους τους παρατηρητές, *ο Παγκόσμιος Χρόνος*. Επομένως, η απόδειξη της σχέσης (2.7) είναι σωστή στα πλαίσια της Νευτώνειας Μηχανικής και επαληθεύεται ως γνωστόν με τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια όσο μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός είναι οι σχετικές ταχύτητες των εμπλεκομένων σωμάτων, με όση δηλαδή ακρίβεια ισχύει η Νευτώνεια Μηχανική συνολικά.

Δεδομένου, όμως, οτι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι πεπερασμένη, η παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον συγχρονισμό των ρολογιών των διαφόρων παρατηρητών. Τί μπορεί να γίνει; Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Ας πάρουμε δύο παρατηρητές Α και Β σε σταθερή απόσταση L μεταξύ τους. Ενας τρόπος να συγχρονίσουν τα ρολόγια τους είναι να στείλει ο Α τη χρονική στιγμή t_A ένα φωτεινό σήμα στον Β και ο Β όταν λάβει το σήμα να ρυθμίσει το ρολόϊ του να δείχνει $t_A + L/c$, αφού L/c είναι ο χρόνος που χρειάζεται το φώς να φτάσει στον Β. Ομως, αυτό προϋποθέτει ότι έχουν προηγουμένως μετρήσει την ταχύτητα του φωτός c. Για να μετρήσουν όμως την ταχύτητα του φωτός, διαιρώντας την μεταξύ τους απόσταση δια του χρόνου που έκανε το φως να πάει από τον Α στον Β, πρέπει πρώτα να συγχρονίσουν τα ρολόγια τους. 'Ομως, ο Α μπορεί μόνος του να μετρήσει τη ταχύτητα του φωτός αν υποθέσει ότι αυτή είναι η ίδια για κίνηση του φωτός σε δύο αντίθετες κατευθύνσεις. Με αυτή την υπόθεση, μπορεί να βάλει ένα κάτοπτρο σε απόσταση d, και να μετρήσει με το ρολόϊ του το χρόνο Δt, που κάνει το φως να πάει από τον Α στο κάτοπτρο και πίσω. Η ταχύτητα του φωτός θα είναι $c = 2d/\Delta t$. 'Ετσι, συνδυάζοντας τη μέτρηση της c και το παραπάνω νοητικό πείραμα, επιτυγχάνεται ο συγχρονισμός των ρολογιών δύο παρατηρητών με μηδενική σχετική ταχύτητα.

Παρεμπιπτόντως, οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε σύστημα συντεταγμένων ή, ισοδύναμα, "παρατηρητή" Σ θα θεωρούμε πάντα ότι τα ρολόγια των παρατηρητών στο Σ είναι συγχρονισμένα.

Τα πράγματα δυσκολεύουν αν τα δύο συστήματα αναφοράς έχουν μη μηδενική σχετική ταχύτητα. Τότε, όπως θα γίνει σαφές στη συνέχεια, χάνεται η έννοια του ταυτόχρονου δύο γεγονότων, και επιπλέον οι χρόνοι στα δύο συστήματα κυλάνε με διαφορετικούς ρυθμούς, με συνέπεια την αλλαγή της σχέσης (2.7) και την αντικατάστασή της από άλλη συμβιβαστή, φυσικά, με το δεύτερο αξίωμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εναλλακτική απόδειξη της (2.4).

(α) Χρησιμοποιείστε τον μετασχηματισμό (2.2) και (2.3) στη Λαγκραντζιανή

$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - U(\mathbf{r}') \tag{2.9}$$

του υλικού σημείου στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ' για να βρείτε τη Λαγκραντζιανή L του υλικού σημείου στο σύστημα Σ.

(β) Χρησιμοποιείστε την L που βρήκατε για να γράψετε την εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου στο περιστρεφόμενο σύστημα Σ.

2. Φορά κυκλώνων.

Με βάση την υπόθεση ότι οι κυκλώνες στην εύκρατη ζώνη δημιουργούνται από την κίνηση αέριων μαζών ώστε να καλύψουν βαρομετρικό χαμηλό, που προέκυψε κάπου σε μέσο γεωγραφικό πλάτος, εξηγείστε γιατί στο βόρειο ημισφαίριο οι κυκλώνες είναι αριστερόστροφοι, ενώ στο νότιο δεξιόστροφοι.

3. Χορευτής στον πάγο.

Εξηγείστε γιατί όταν ο περιστρεφόμενος χορευτής στον πάγο μαζεύει τα χέρια του αυξάνει η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του. Δώστε την εξήγηση τόσο από τη σκοπιά ενός αδρανειακού παρατηρητή, όσο και από τη σκοπιά του ίδιου του χορευτή.

3 Οι πρώτες συνέπειες των αξιωμάτων

3.1 Η σχετικότητα του ταυτόχρονου

Μια πρώτη άμεση συνέπεια του πεπερασμένου της ταχύτητας του φωτός είναι η *σχετικότητα του ταυτόχρονου*. Δύο γεγονότα που συμβαίνουν ταυτόχρονα ως προς κάποιον παρατηρητή, δεν είναι εν γένει ταυτόχρονα ως προς άλλους, κινούμενους σε σχέση με τον πρώτο.

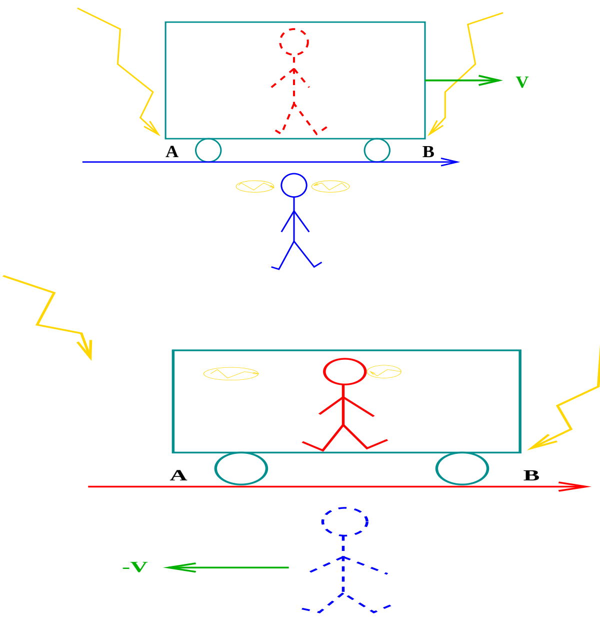
Κάθε *γεγονός* A (π.χ. το άναμα ενός λαμπτήρα, η σύγκρουση δύο υλικών σημείων, η διάσπαση ενός πυρήνα αμελητέου μεγέθους, η έκκρηξη ενός μακρινού αστέρα κ.ο.κ.) λαμβάνει χώρα σε κάποιο σημείο του χώρου κάποια χρονική στιγμή. Επομένως, σε κάθε σύστημα αναφοράς χαρακτηρίζεται από τρεις χωρικές συντεταγμένες και την ένδειξη των συγχρονισμένων ρολογιών του συστήματος. Ειδικώτερα, ως προς καρτεσιανό σύστημα Σ οι τέσσερις ποσότητες $\{x_A, y_A, z_A, t_A\}$ ή ισοδύναμα τα τέσσερα μήκη $\{x_A, y_A, z_A, ct_A\}$, αποτελούν τις *χωροχρονικές συντεταγμένες* του γεγονότος Α στο σύστημα Σ.

Εξ' ορισμού, δύο γεγονότα *A και B είναι ταυτόχρονα* σε κάποιο σύστημα αναφοράς Σ αν ισχύει $t_A = t_B$, δηλαδή αν οι χρονικές τους συντεταγμένες είναι ίσες.

Είναι εύκολο να επινοήσει κανείς ζεύγη γεγονότων, που είναι ταυτόχρονα ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα Σ, ενώ δεν είναι ταυτόχρονα ως προς άλλο, Σ', που κινείται σε σχέση με το πρώτο. Για παράδειγμα, θεωρείστε το σύστημα αποβάθρας-τρένου του Σχήματος 3, με το τρένο να κινείται σε σχέση με την αποβάθρα με ταχύτητα V προς τα δεξιά. Θεωρείστε ακόμα τα γεγονότα Α και Β, που ορίζονται από το άναμα δύο λαμπτήρων στα άκρα Α και Β, αντίστοιχα, του τρένου, και τέτοια ώστε τα αντίστοιχα φωτεινά σήματα να φτάνουν ταυτόχρονα τη στιγμή t_Σ στον παρατηρητή Σ ακίνητο στη μέση του τρένου, και επίσης ταυτόχρονα τη στιγμή t'_Σ στον παρατηρητή Σ' στην αποβάθρα, και μάλιστα τη στιγμή που ο τελευταίος βρισκόταν ακριβώς μπροστά στον διερχόμενο Σ.

Οι χρονικές στιγμές t_A και t_B που συνέβησαν τα γεγονότα κατά τον Σ είναι: $t_A = t_B = t_\Sigma - L/2c$, με $2L$ το μήκος του τρένου, και επομένως ο Σ συμπεραίνει ότι τα Α και Β είναι ταυτόχρονα.

Ο Σ' στην αποβάθρα λαμβάνει ταυτόχρονα τα σήματα από τα σημεία Α και Β του τρένου τα οποία βεβαίως εκπέμφθηκαν όταν το τρένο βρισκόταν σε θέση όπως αυτή που δείχνει το Σχήμα 3 β. Οπότε, το σήμα που έφυγε από το Α διήνυσε μεγαλύτερη απόσταση από ότι αυτό που έφυγε από το Β, μέχρι να φτάσουν στον Σ'. Δεδομένου ότι έφτασαν ταυτόχρονα στον Σ' σημαίνει ότι το σήμα από το Α εκπέμφθηκε πριν από το Β. 'Αρα $t'_A < t'_B$.



Σχήμα 3: ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΑΥΤΟ ΝΑ ΑΛΛΑΞΕΙ. ΔΕΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ. Τα συστήματα της αποβάθρας και του τρένου. Τα γεγονότα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι ταυτόχρονα ως προς το πρώτο, αλλά το $\mathcal{B}$ προηγείται του $\mathcal{A}$ ως προς το δεύτερο.

Αρα, ο ένας παρατηρητής μετράει χρονική απόσταση $\Delta t = 0$ ανάμεσα στα γεγονότα που περιέγραψα, ενώ ο ευρισκόμενος στην αποβάθρα μετράει $\Delta t' \neq 0$. Γενικά, δεν μπορούμε να μιλάμε για την *χρονική απόσταση* ανάμεσα σε δύο γεγονότα χωρίς προηγουμένως να προσδιορίσομε σε ποιόν *παρατηρητή* αναφερόμαστε. Αν ο $\mathcal{O}$ μετράει Δt, ο $\mathcal{O}'$ θα μετράει εν γένει $\Delta t' \neq \Delta t$.

Προφανώς, αν η ταχύτητα διάδοσης του φωτός ήταν άπειρη, όπως υπέθετε ο Νεύτωνας, θα ήταν δυνατός ο συγχρονισμός όλων των ρολογιών να δείχνουν τον "Παγκόσμιο Χρόνο" και η χρονική απόσταση δύο οποιωνδήποτε γεγονότων θα ήταν η ίδια ως προς όλους τους παρατηρητές.

3.2 Διαστολή του χρόνου

Ποιά ακριβώς είναι η σχέση που συνδέει το Δt με το $\Delta t'$ για μια δεδομένη σχετική ταχύτητα V των δύο παρατηρητών; Πριν απαντήσουμε το ερώτημα αυτό γενικά για οποιαδήποτε γεγονότα, θα ξεκινήσω με έναν ειδικό συνδυασμό γεγονότων και παρατηρητών για τους οποίους η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα εύκολο να προσδιοριστεί.

Ας πάρουμε λοιπόν την περίπτωση ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς Σ, και *δύο γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση ως προς τον Σ*. Σ' είναι ένας άλλος παρατηρητής, που κινείται με ταχύτητα V ως προς τον Σ, όπως δείχνει το Σχήμα 1.

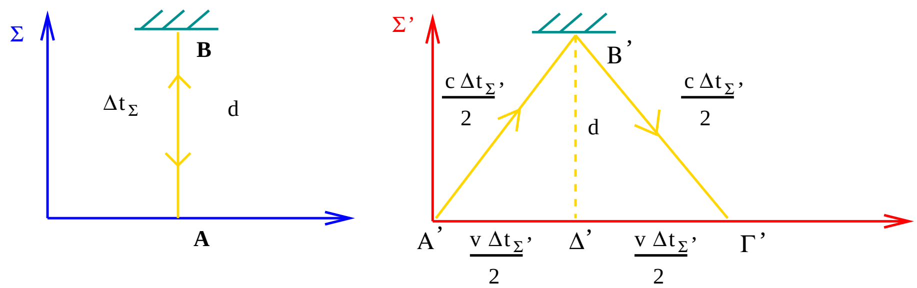
Τα δύο αυτά γεγονότα μπορεί να είναι ο,τιδήποτε. Να μερικά παραδείγματα:

(α) Η διέλευση ενός ηλεκτρονίου από την αρχή των αξόνων ενός αδρανειακού συστήματος, και το άναμα ενός λαμπτήρα στην ίδια θέση.

(β) Φανταστείτε εμένα να κινούμαι ως προς εσάς (καθισμένοι στα θρανία σας) με ταχύτητα V κρατώντας σταθερά στα χέρια μου ένα απλό εκκρεμές, που εκτελεί ταλάντωση. Δύο διαδοχικές μέγιστες απομακρύνσεις του εκκρεμούς είναι δύο γεγονότα, που λαμβάνουν χώρα στο ίδιο σημείο ως προς το σύστημα αναφοράς το στερεωμένο πάνω μου. Εσείς αποτελείτε ένα παράδειγμα συστήματος Σ'.

(γ) Φανταστείτε πάλι κάποιον που βαδίζει με σταθερή ταχύτητα ως προς εσάς. Η καρδιά του και επομένως και το κάθε μόριό της εκτελεί περιοδική κίνηση. Δύο μέγιστες απομακρύνσεις ενός μορίου της είναι δύο γεγονότα, που λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση ως προς τον διαβάτη. Η περίοδος της καρδιακής κίνησης του πεζού είναι διαφορετική ως προς αυτόν και εσάς. Η ηλικία του πεζού που σχετίζεται με την περίοδο της καρδιακής του κίνησης είναι επίσης διαφορετική ως προς τους δύο παρατηρητές.

Η σχέση ανάμεσα στις χρονικές αποστάσεις Δt και $\Delta t'$ δύο γεγονότων, που λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση ως προς το ένα σύστημα αναφοράς, μπορεί να προσδιοριστεί με το εξής απλό πείραμα, που βασίζεται στο δεύτερο αξίωμα: Ας πάρουμε μία ράβδο, στο ένα άκρο της οποίας έχομε στερεώσει μια λάμπα και στο άλλο έναν καθρέπτη κάθετα στη ράβδο, όπως δείχνει το Σχήμα 3.3.



Σχήμα 4: Η διάταξη της ράβδου με τον λαμπτήρα και το κάτοπτρο

Η λάμπα ανάβει κάποια στιγμή και το φως της διαδίδεται μέχρι τον καθρέπτη, ανακλάται και επιστρέφει εκεί από όπου ξεκίνησε. Τα γεγονότα Α=*εκπομπή της φωτεινής δέσμης* και Β=*επιστροφή της στο σημείο εκκίνησης* είναι δύο γεγονότα, που λαμβάνουν χώρα εξ ορισμού στο ίδιο σημείο στο σύστημα αναφοράς (Σ) της ράβδου. Ως προς το σύστημα Σ το φως διήνυσε απόσταση 2(AB)=2d με ταχύτητα c, και επομένως, ο χρόνος που πέρασε από την εκπομπή του φωτός μέχρι την επιστροφή του στο σημείο εκκίνησης, δηλαδή η χρονική απόσταση των Α και Β είναι

$$(\Delta t)_\Sigma = \frac{2d}{c} \tag{3.1}$$

Ο παρατηρητής Σ και μαζί με αυτόν η ράβδος, κινούνται ως προς τον Σ' με ταχύτητα V προς τα δεξιά κατά μήκος του κοινού άξονα των x, όπως δείχνει το Σχήμα 3.3. Επομένως, ο Σ' θα δει την δέσμη φωτός να ακολουθεί την τροχιά Α'Β'Γ' και με την ίδια ταχύτητα c σύμφωνα με το δεύτερο αξίωμα.

Προφανώς, αφού η απόσταση Α'Β'Γ' είναι μεγαλύτερη της 2d, ο χρόνος $\Delta t_{\Sigma'}$, που ο Σ' θα μετρήσει ανάμεσα στα γεγονότα Α και Β, θα είναι μεγαλύτερος του Δt_{Σ}. Για να βρούμε τη σχέση που τους συνδέει εφαρμόζομε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο Α'Β'Δ' και παίρνομε [6]

$$\left(\frac{V\Delta t_{\Sigma'}}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{c\Delta t_{\Sigma'}}{2}\right)^2 \tag{3.2}$$

Λύνοντας την (3.2) ως προς $\Delta t_{\Sigma'}$, κάνοντας χρήση και της (3.1), καταλήγομε στον τύπο της *διαστολής του χρόνου*

$$\boxed{\Delta t_{\Sigma'} = \frac{\Delta t_{\Sigma}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}} \tag{3.3}$$

Ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος είναι μικρότερος από την μονάδα. Αρα, ο χρόνος ανάμεσα στα δύο γεγονότα, που μετράει ο παρατηρητής Σ', είναι μεγαλύτερος από αυτόν που μετράει ο παρατηρητής Σ, ως προς τον οποίο αυτά συμβαίνουν στην ίδια θέση.

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε παραπάνω είναι γενικό και αναφέρεται σε δύο οποιαδήποτε γεγονότα, που συμβαίνουν στην ίδια θέση ως προς τον ένα παρατηρητή, και όχι ειδικά για τα γεγονότα εκπομπής και επιστροφής φωτεινών σημάτων, που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξή του. Πράγματι, θεωρείστε δύο τυχαία γεγονότα Γ και Δ, για τα οποία ισχύει $x_\Gamma = x_\Delta$. Θεωρείστε τώρα μία ράβδο σαν αυτήν του παραπάνω "πειράματος" και φανταστείτε τα εξής δύο γεγονότα: Γεγονός Α="άναμα την λάμπας στο ένα άκρο ράβδου" να ταυτίζεται χωρικά και χρονικά με το Γ, δηλαδή να έχει $t_A = t_\Gamma$ και $x_A = x_\Gamma$. Αντίστοιχα, γεγονός Β="επιστροφή της φωτεινής ακτίνας στο σημείο εκπομπής της" στη θέση $x_B = x_\Gamma = x_\Delta$. Διαλέγοντας κατάλληλα το μήκος της ράβδου μπορείτε επιπλέον να φροντίσετε ώστε $t_B = t_\Delta$. Τα γεγονότα επομένως Γ και Δ ταυτίζονται στο σύστημά σας Σ χωρικά και χρονικά με τα Α και Β, αντίστοιχα. Οπότε, η χρονική απόσταση των Γ και Δ ισούται με αυτήν των Α και Β, και με βάση την σχέση (3.3) έχουμε

$$t_\Delta - t_\Gamma = t_B - t_A = ({t'}_B - {t'}_A)\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = ({t'}_\Delta - {t'}_\Gamma)\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,, \tag{3.4}$$

δηλαδή την ίδια σχέση (3.3) για τα Γ και Δ.

Εφαρμογή 1: Η διάσπαση του μιονίου. Το μιόνιο μ έχει μέσο χρόνο ζωής $\tau_\mu \simeq 2.2 \times 10^{-6} sec$. Ζει δηλαδή *στο σύστημα ηρεμίας του* [7] κατά μέσο όρο χρόνο τ_μ προτού διασπαστεί σε e, ν_μ και $\bar{\nu}_e$.

Ας πάρουμε τώρα ένα μιόνιο που κινείται μέσα σε έναν επιταχυντή, ή ένα των κοσμικών ακτίνων που πέφτει προς την Γη με ταχύτητα V. Πόσο χρόνο τ'_μ (πάντα κατά μέσο όρο) θα ζήσει το σωμάτιο αυτό ως προς παρατηρητή ακίνητο στη Γη;

Τα γεγονότα *δημιουργία* και *διάσπαση* του μεσονίου λαμβάνουν χώρα στην ίδια θέση στο σύστημα ηρεμίας του (Σ). Απο την (3.3) βρίσκουμε

$$\tau'_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,,$$

μεγαλύτερο από το μέσο χρόνο ζωής του.

Επομένως, ως προς τον γήινο παρατηρητή ένα τέτοιο μεσόνιο στη διάρκεια της ζωής του θα διανύσει μέση απόσταση ίση προς

$$l' = V\tau'_\mu = \frac{V\tau_\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

[6]Σημειώστε ότι η απόσταση Β'Δ', που διήνυσε το φως στην εγκάρσια προς τη σχετική ταχύτητα κατεύθυνση, είναι d και ως προς τον Σ'. Ο λόγος είναι ότι, όπως θα δείξουμε ευθύς αμέσως, μήκη κάθετα στη κατεύθυνση της σχετικής κίνησης είναι τα ίδια ως προς τους δύο παρατηρητές.

Πράγματι, για να πειστείτε θεωρείστε δύο ράβδους Ρ1 και Ρ2 με το ίδιο μήκος στο σύστημα ηρεμίας τους. Φανταστείτε ότι κρατάτε την Ρ1 και θέτετε σε κίνηση την Ρ2 σε κατεύθυνση κάθετη και προς τις δύο και έτσι ώστε να πλησιάζει την Ρ1. Εστω ότι το μήκος της κινούμενης ράβδου Ρ2 είναι μικρότερο από αυτό της Ρ1. Τότε με κατάλληλο σχεδιασμό του πειράματος, ώστε όταν οι δύο ράβδοι έλθουν σε επαφή τα κάτω άκρα τους να συμπίπτουν, η Ρ2, εφοδιασμένη με ακίδα στο πάνω άκρο της, θα χαράξει την Ρ1. 'Ομως, ένας δεύτερος παρατηρητής που παρακολουθεί το πείραμα όντας όμως ακίνητος ως προς την Ρ2, περιμένει ότι η ακίδα στο πάνω άκρο της Ρ1 θα χαράξει την Ρ2, αφού ως προς αυτόν η Ρ1 είναι η κινούμενη και με βάση την υπόθεση, η μικρότερη ράβδος. Αυτό είναι άτοπο, αφού *το αποτέλεσμα του πειράματος* (το ποιά ράβδος θα φέρει ίχνος ακίδας) *είναι μοναδικό* και με αυτό πρέπει να συμφωνούν όλοι οι παρατηρητές.

Κατά συνέπεια η αρχική υπόθεση ότι η κινούμενη ράβδος είναι μικρότερη είναι λανθασμένη, και το συμπέρασμα είναι ότι *αποστάσεις, που μετράει παρατηρητής σε κατεύθυνση κάθετη προς την σχετική ταχύτητά του V ως προς αυτές, δεν εξαρτώνται από το μέτρο της V.*

[7]Ο χρόνος ζωής ενός σωματίου ορίζεται ως προς το σύστημα ηρεμίας του, που είναι το μόνο χαρακτηριστικό σύστημα του σωματίου.

Εφαρμογή 2: Ο χρόνος ζωής ενός κοσμοναύτη. Κοσμοναύτης ταξιδεύει στο διάστημα με ταχύτητα V ως προς την Γη. Εστω ότι ο κοσμοναύτης πέθανε σε ηλικία ας πούμε $\tau = 76$ ετών. Για ένα παρατηρητή στη Γη ο κοσμοναύτης έζησε

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

Για V πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός, ο χρόνος τ' μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλος, και η απόσταση που μπορεί να έχει διανύσει ο κοσμοναύτης στην διάρκεια της 76χρονης ζωής του, επίσης αυθαίρετα μεγάλη. Αυτά συμπεραίνει ο γήινος παρατηρητής. Επομένως, διαλέγοντας ταχύτητα V αρκετά κοντά στην ταχύτητα c του φωτός, μπορεί κάποιος να φύγει απο την Γη και να πάει *οπουδήποτε και όσο σύντομα* (κατά τον ίδιο) επιθυμεί.

Ερώτηση 1: Με τί ταχύτητα ως προς τη Γη πρέπει να ταξιδέψει κάποιος ώστε σε ένα έτος (δικό του) να φτάσει στην Ανδρομέδα, που απέχει απο τη Γη 2 εκατομμύρια έτη φωτός;

Η ζητούμενη ταχύτητα V δίδεται απο τη σχέση

$$\frac{V \times 1year}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 2 \times 10^6 years \times c$$

δηλαδή

$$\frac{V}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/4) \times 10^{-12}}} \simeq 1 - \frac{1}{8} \times 10^{-12} \simeq 0.9999999999988$$

Ερώτηση 2: Πόσος χρόνος τ' πέρασε σύμφωνα με τον γήινο παρατηρητή ανάμεσα στην αναχώρηση του κοσμοναύτη απο τη Γη και την άφιξή του στην Ανδρομέδα;

Ο τύπος (3.3) δίνει

$$\tau' = \frac{1\,year}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \simeq 2 \times 10^6\, years$$

3.3 Συστολή του μήκους

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα παραπάνω για να αποδείξουμε οτι και οι χωρικές αποστάσεις στην κατεύθυνση της κίνησης εξαρτώνται από τον παρατηρητή που τις μετράει. Δύο παρατηρητές με σχετική ταχύτητα V στην κατεύθυνση του κοινού άξονα των x βρίσκουν διαφορετικό αποτέλεσμα όταν μετράνε την απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία του άξονα x.

Φανταστείτε δύο διαφορετικούς παρατηρητές Σ και Σ' να μετράνε το φάρδος της αίθουσας διδασκαλίας. Ο ένας (Σ) είναι το σύστημα αναφοράς της αίθουσας, εκείνο το σύστημα ως προς το οποίο η μετρούμενη απόσταση είναι ακίνητη. Ο άλλος (Σ') κινείται ως προς την αίθουσα με ταχύτητα V, όπως δείχνει το παρακάτω Σχήμα 5.

Ο χρόνος που χρειάζεται ο Σ' να διανύσει την απόσταση απο την μια άκρη της αίθουσας στην άλλη είναι $\Delta t'$ σύμφωνα με τον Σ' και Δt για τον Σ. Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει η σχέση

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{3.5}$$

Επομένως, κατά τον Σ το πλάτος της αίθουσας είναι

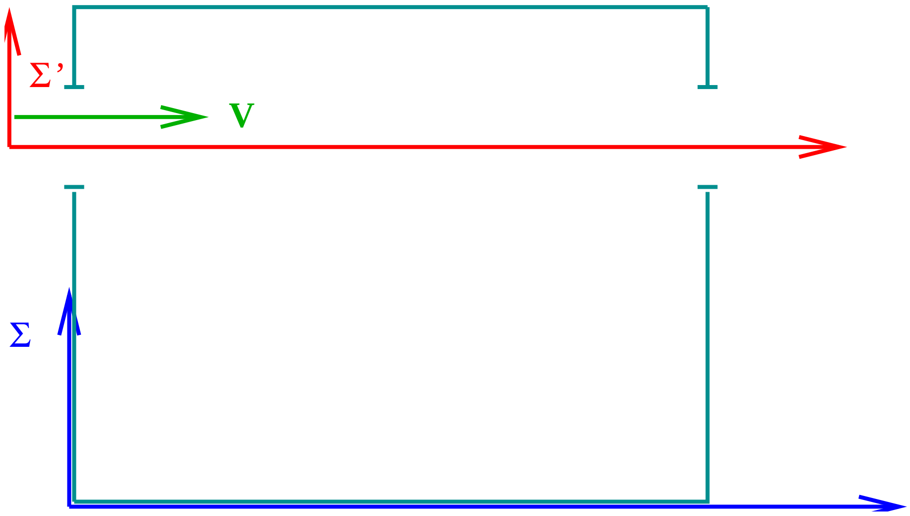
$$L = V\Delta t \tag{3.6}$$

ενω ο Σ' βρίσκει

$$L' = V\Delta t' = V\Delta t\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{3.7}$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας την $L = V\Delta t$ καταλήγομε

$$\boxed{L' = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{3.8}$$

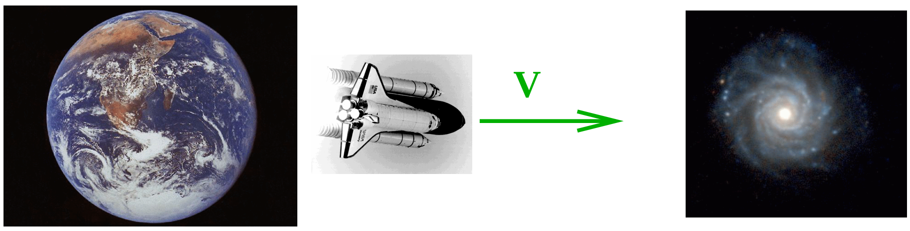


Σχήμα 5: Μέτρηση του πλάτους της αίθουσας διδασκαλίας

Αρα, ο παρατηρητής Σ', δηλαδή αυτός που *κινείται ως προς την μετρούμενη απόσταση* μετράει *μικρότερο μήκος* από αυτό που μετράει ο Σ, στο σύστημα ηρεμίας της.

Χρησιμοποιήσαμε το παράδειγμα του πλάτους της αίθουσας για να αποδείξουμε τον τύπο της *συστολής του μήκους*. Οπως και με τη διαστολή του χρόνου, τα ίδια ισχύουν για οποιοδήποτε μήκος. Τα μήκη κινούμενων αντικειμένων μικραίνουν στη κατεύθυνση της κίνησής τους κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-V^2/c^2}$. Ολες οι αποστάσεις που διανύει κάποιος είναι μικρότερες στην κατεύθυνση της κινησής του κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-V^2/c^2}$, από ό,τι μετράει παρατηρητής ακίνητος ως προς αυτές.

Εφαρμογή 1: Στο ταξίδι για την Ανδρομέδα, ο ταξιδιώτης (Σχήμα 6) γνωρίζει ότι η απόσταση που έχει να διανύσει δεν είναι τα $L = 2000000$ έτη φωτός, που έχουμε μετρήσει από τη Γη, αλλά $L' = L(1-V^2/c^2)^{1/2}$. Διαλέγοντας την ταχύτητά του αρκετά κοντά στο c μπορεί να ταξιδέψει σε όποιο μακρινό γαλαξία θελήσει, και σε όσο σύντομο χρονικό διάστημα αποφασίσει! Στο όριο που η ταχύτητά του γίνει c, όλες οι αποστάσεις στη κατεύθυνση της κίνησής του μηδενίζονται!!



Σχήμα 6: Κοσμοναύτης στο δρόμο για την Ανδρομέδα

3.4 Τα σχετικιστικά φαινόμενα στην καθημερινή μας εμπειρία

Βρισκόμαστε λοιπόν μπροστά σε μια πραγματικότητα πολύ διαφορετική από αυτήν που έχουμε συνηθίσει. Σε αντίθεση με την καθημερινή μας εμπειρία, που για τα μηχανικά φαινόμενα περιγράφεται με μεγάλη ακρίβεια με τους νόμους του Νεύτωνα, οι χρονικές και οι χωρικές αποστάσεις δύο γεγονότων εξαρτώνται απο τον παρατηρητή που τις μετράει!! Δεν υπάρχουν ο Παγκόσμιος Χρόνος και Χώρος που είχαμε συνηθίσει στη Νευτώνεια Μηχανική.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο χρόνος κυλάει πιό αργά για τους ταξιδιώτες ενός αεροπλάνου σε σχέση με αυτούς, που μένουν "ακίνητοι" στη Γη. Ολοι μας όμως έχουμε επανηλειμένα ταξιδέψει με αεροπλάνο χωρίς να παρατηρήσουμε κάποια καθυστέρηση στη γήρανσή μας σε σχέση με συγγενείς και φίλους μας στη Γη!

Στην πραγματικότητα υπάρχει πράγματι καθυστέρηση στη γήρανσή μας, αλλά είναι στις συνθήκες της καθημερινότητάς μας τόσο μικρή ώστε δεν γίνεται αντιληπτή. Πράγματι, σύμφωνα με τους τύπους της διαστολής του χρόνου και της συστολής του μήκους οι αποκλίσεις απο τις σχέσεις $\Delta t' = \Delta t$ και $L' = L$ της Νευτώνειας Μηχανικής είναι ανάλογες της τετραγωνικής ρίζας του $1 - V^2/c^2$. Ο ταξιδιώτης ενός αεροπλάνου κινείται ως προς εμάς στη Γη με ταχύτητα, ας πούμε, $V \simeq 1080km/h = 0.3km/sec$. Οπότε

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{1 - 10^{-12}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \times 10^{-12} \,. \tag{3.9}$$

Επομένως, ένα ταξίδι που για τον ταξιδιώτη στο αεροπλάνο διαρκεί χρόνο T, τα ρολόγια του παρατηρητή στη Γη θα δείξουν διάρκεια

$$T' \simeq \frac{T}{1 - \frac{1}{2} \times 10^{-12}} \simeq T \times (1 + 0.5 \times 10^{-12}) \tag{3.10}$$

μεγαλύτερο από τον χρόνο T κατά

$$\delta T \simeq T \times 10^{-12} \,. \tag{3.11}$$

Κατά συνέπεια, για να διαφέρει στο τέλος του ταξιδιού με αεροπλάνο η ηλικία των δύο παρατηρητών κατά δT μόλις $1sec$, το ταξίδι πρέπει να διαρκέσει $T \sim 10^5$έτη. Με άλλα λόγια, αν περάσει κάποιος όλη του τη ζωή (100 έτη) ταξιδεύοντας με το αεροπλάνο, θα καθυστερήσει τη γήρανσή του κατά μόλις $0.001sec$.

Επομένως για να επαληθεύσει κανείς ή να απορρίψει την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, θα πρέπει είτε να μελετήσει σωμάτια και συστήματα, που κινούνται με ταχύτητες πολύ μεγαλύτερες από αυτήν του αεροπλάνου, είτε, αν επιμένει στα γνωστά μας μέσα μετακίνησης θα πρέπει να επινοήσει πειράματα πολύ μεγαλύτερης ακρίβειας από αυτήν της καθημερινής εμπειρίας. Τέτοια πειράματα έχουν γίνει και συνεχίζουν να γίνονται για επίτευξη όλο και μεγαλύτερης ακρίβειας. 'Ολα μέχρι σήμερα έχουν οδηγήσει σε αποτελέσματα απολύτως συμβιβαστά με τις παραπάνω προβλέψεις της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας [8].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Συγχρονισμός ρολογιών συστήματος αναφοράς*. Θεωρείστε δύο ερευνητές ακίνητους σε διαφορετικές θέσεις στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Προσπαθείστε να προτείνετε τρόπο με τον οποίο θα μπορέσουν οι δύο αυτοί να συγχρονίσουν τα ρολόγια τους. Εξηγείστε γιατί προκειμένου να επιτύχουν, είναι αναγκαίο να γνωρίζουν κάποια "ταχύτητα αναφοράς" [9].

2. Με τί ταχύτητα (ως προς τη Γη) πρέπει να ταξιδέψει κανείς ώστε να φτάσει στην Ανδρομέδα σε 1 έτος;

3. *Το μ-μεσόνιο στο σύστημα ηρεμίας του*. Ενα μ-μεσόνιο παράχθηκε από τη διάσπαση ενός π-μεσονίου σε ύψος $h = 10000m$ (Σχήμα 7) από την επιφάνεια του εδάφους (όπως μετριέται απο γήινο παρατηρητή) και κατευθύνεται προς τη Γη με ταχύτητα $V = 0.999c$. Πόση απόσταση στο σύστημα του μεσονίου πρέπει να διανύσει μέχρι να φτάσει στη Γη; Θα προφτάσει να πέσει στη Γη προτού διασπαστεί σε $\tau \sim 2.0 \times 10^{-6} sec$; Συμφωνεί με το παραπάνω συμπέρασμα ένας γήινος παρατηρητής;

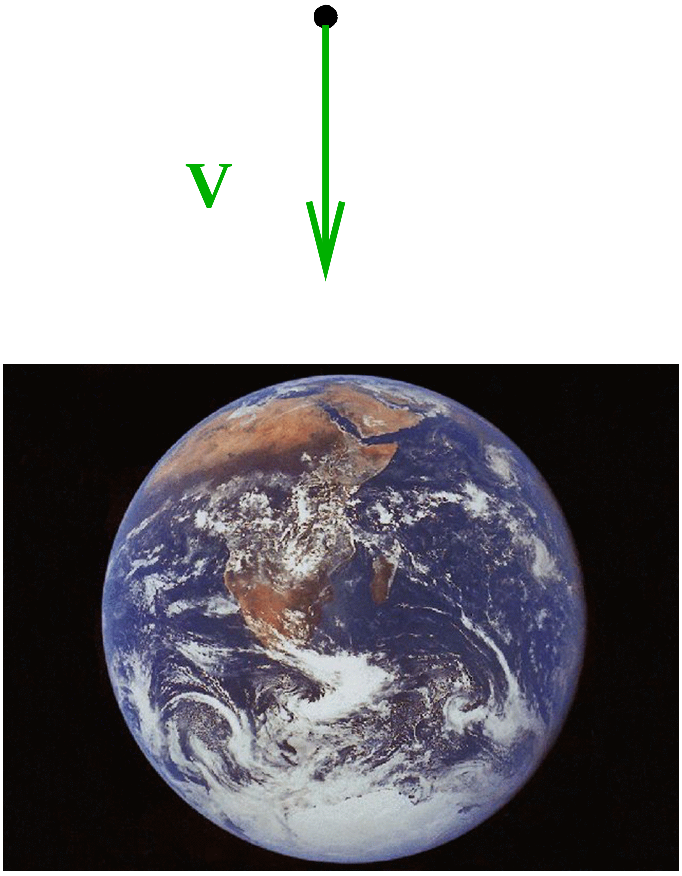
4. Να υπολογισθούν οι παρακάτω παραστάσεις με την ακρίβεια που αναφέρεται: (α) 0.99^2 με ακρίβεια δεύτερου δεκαδικού ψηφίου. (β) 0.999999^4 με ακρίβεια έκτου δεκαδικού ψηφίου. (γ) $\sqrt{1 - 0.001^2}$ με ακρίβεια έβδομου δεκαδικού ψηφίου.

5. Δέσμη με $N_0 = 10^{20}$ μιόνια κινείται με ταχύτητα $0.999999c$. (α) Πόσα μιόνια εκτιμάτε οτι θα έχουν απομείνει στη δέσμη μετά από $t = 10^{-2} sec$; (β) Τί απόσταση θα έχουν διανύσει μέχρι εκείνη τη στιγμή;
Ο χρόνος ζωής του μιονίου είναι $\tau_\mu \simeq 2 \times 10^{-6} sec$.

6. Δοχείο όγκου V_0 (στο σύστημα ηρεμίας του) και ακανόνιστου σχήματος κινείται με ταχύτητα u ως προς τον παρατηρητή Σ. (α) Ποιός είναι ο όγκος V που μετράει ο Σ; (β) Αν n_0 είναι η πυκνότητα σωματιδίων του αερίου μέσα στο δοχείο στο σύστημα ηρεμίας του, τί πυκνότητα n μετράει ο Σ;

[8] Δείτε για παράδειγμα τις εργασίες................

[9] Ως ταχύτητα αναφοράς χρησιμοποιείται η ταχύτητα του φωτός. Για τον Νεύτωνα αυτή ήταν άπειρη, ενώ για τον Einstein πεπερασμένη με τιμή c.



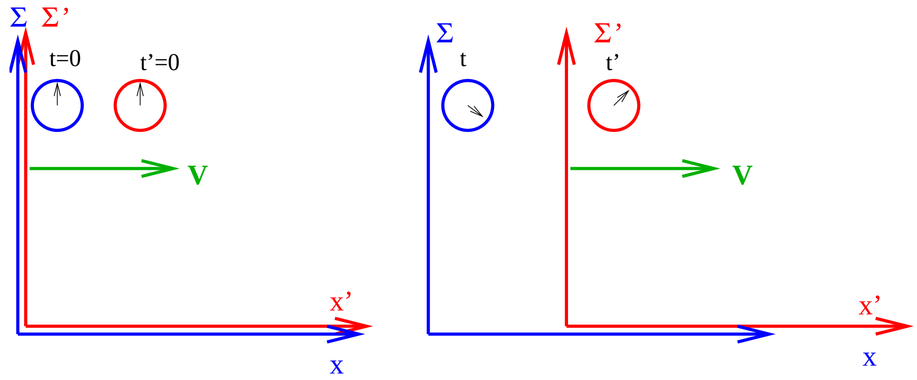
Σχήμα 7: μ-μεσόνιο πέφτει προς τη Γη

7. Ταξιδιώτης σε διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα $v = 0.9999999999c$ προς μακρινό γαλαξία, που απέχει από τη Γη $L = 2 \times 10^6$ έτη φωτός. (α) Πόση απόσταση αντιλαμβάνεται ο ταξιδιώτης οτι έχει να διανύσει μέχρι να φτάσει στο γαλαξία αυτόν; (β) Πόσο χρόνο υπολογίζει οτι θα χρειαστεί αν διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του; (γ) Πόσο χρόνο θα διαρκέσει το ταξίδι κατά τον γήινο παρατηρητή;

8. Το Ρέθυμνο απέχει από το Ηράκλειο 75 km. Φανταστείτε οτι η ταχύτητα του φωτός ήτανε 150 km/h. Πόση ώρα θα κάνατε να φτάσετε με το αυτοκίνητό σας στο Ρέθυμνο, αν ταξιδεύατε με σταθερή ταχύτητα 75 km/h;

4 Ο μετασχηματισμός Lorentz

Θεωρείστε δύο παρατηρητές Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα V, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 8: Οι Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα V

Οι Σ και Σ' προκειμένου να περιγράψουν τα διάφορα γεγονότα, έχουν ορίσει ο καθένας ένα σύστημα συντεταγμένων για τον προσδιορισμό των θέσεων των γεγονότων στο χώρο και είναι εφοδιασμένοι με συγχρονισμένα ιδανικά ρολόγια για να περιγράφουν την χρονική στιγμή, που έλαβε χώρα το κάθε γεγονός στα δύο συστήματα. Ετσι, ο Σ χαρακτηρίζει τα διάφορα γεγονότα με τις χωροχρονικές συντεταγμένες τους (x, y, z, t) και ο Σ' με τις (x', y', z', t'). Το τυχόν γεγονός Α θα περιγράφεται με τις συντεταγμένες (x_A, y_A, z_A, t_A) από τον Σ και με τις (x'_A, y'_A, z'_A, t'_A) απο τον Σ'.

Για να μπορούν οι δύο παρατηρητές να επικοινωνήσουν και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα των πειραμάτων και τωνπαρατηρήσεών τους, πρέπει να γνωρίζουν πώς οι συντεταγμένες (x', y', z', t') ενός οποιουδήποτε γεγονότος σχετίζονται με τις (x, y, z, t) και αντιστρόφως.

Οι σχέσεις αυτές, που συνδέουν δύο αδρανειακούς παρατηρητές σε σχετική κίνηση ονομάζονται *μετασχηματισμός Lorentz* και με την εξαγωγή τους θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό.

4.1 Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να ορίσουμε τις κατευθύνσεις των αξόνων x και x' να συμπίπτουν με την κατεύθυνση της σχετικής ταχύτητας των Σ και Σ'. Μπορούμε, επίσης χωρίς βλάβη της γενικότητας, να φροντίσουμε, ώστε τη στιγμή που συμπίπτουν οι αρχές των αξόνων τους, οι Σ και Σ' να ρυθμίσουν τα ρολόγια τους να δείχνουν $t = 0 = t'$.

Ετσι, η "σύμπτωση των αρχών των αξόνων" αποτελεί ένα γεγονός, που έχει συντεταγμένες

$$x = y = z = 0 = t \quad , \quad x' = y' = z' = 0 = t' \tag{4.1}$$

κατά τους παρατηρητές Σ και Σ', αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων μας υποδεικνύουν να αναζητήσουμε μετασχηματισμό των συντεταγμένων ανάμεσα στα Σ και Σ' που να είναι γραμμικός, και που για να ικανοποιεί την (4.1) θα γράφεται στη μορφή [10]

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2 t \quad , \quad t' = \alpha_3 x + \alpha_4 t \tag{4.2}$$

με τις παραμέτρους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, που μένει να προσδιοριστούν, να εξαρτώνται μόνο απο την σχετική ταχύτητα V των Σ και Σ'.

Ενας τρόπος να υπολογίσει κανείς αυτές τις παραμέτρους είναι ο εξής:

Βήμα 1. Χρήση του φαινομένου της διαστολής του χρόνου.

Οπως αποδείχτηκε παραπάνω, οι χρονικές αποστάσεις $t'_A - t'_B$ και $t_A - t_B$ ως προς τους παρατηρητές Σ' και Σ, αντίστοιχα, δύο γεγονότων Α και Β, που συμβαίνουν στην ίδια θέση, ας πούμε ως

[10] Αποδείχτηκε και χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του τύπου "διαστολής του χρόνου" ότι αποστάσεις κάθετες στη σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων παραμένουν αναλλοίωτες. Αρα, οι συντεταγμένες y και z οποιουδήποτε γεγονότος είναι οι ίδιες για τους Σ και Σ'. Η σχέση (4.2) είναι ο ζητούμενος κανόνας μετασχηματισμού των υπόλοιπων συντεταγμένων x και t.

προς τον παρατηρητή Σ (δηλαδή έχουν $x_A = x_B$), ικανοποιούν τη σχέση:

$$t'_A - t'_B = \frac{t_A - t_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.3}$$

Η δεύτερη απο τις (4.2) γράφεται διαδοχικά για τα γεγονότα Α και Β:

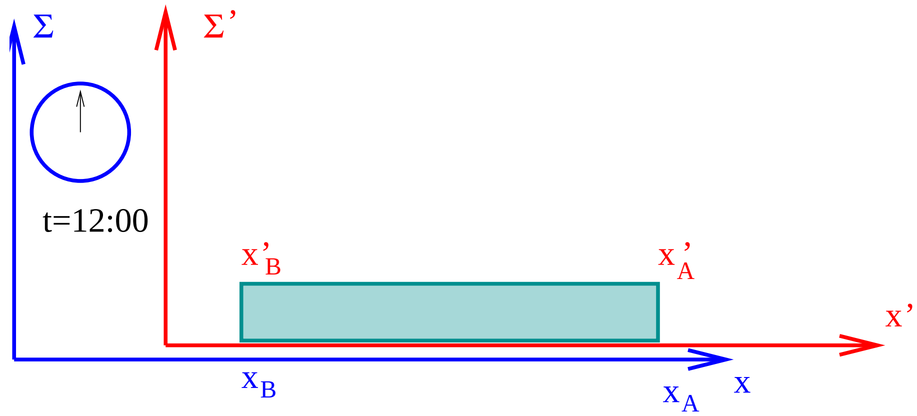
$$t'_A = \alpha_3 x_A + \alpha_4 t_A \quad , \quad t'_B = \alpha_3 x_B + \alpha_4 t_B \tag{4.4}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και συγκρίνοντας με την (4.3) προκύπτει ότι

$$\alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.5}$$

Βήμα 2. Χρήση της συστολής του μήκους.

Η παράμετρος α_1 υπολογίζεται κάνοντας χρήση του φαινομένου της συστολής του μήκους ως εξής: Ας θεωρήσουμε τη μέτρηση στο σύστημα Σ του μήκους μιας ράβδου *ακίνητης ως προς τον Σ'*, που επομένως κινείται ως προς τον Σ με ταχύτητα V. Το σκηνικό περιγράφεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Η μέτρηση του μήκους κινούμενης ράβδου

Η μέτρηση γίνεται ως εξής: Τοποθετούμε παρατηρητές ακίνητους κατά μήκος του άξονα των x στο Σ με τα ρολόγια τους συγχρονισμένα, και τους δίνομε την εξής εντολή: Σε κάποια χρονική στιγμή, ας πούμε όταν τα ρολόγια τους δείχνουν 12:00, να σηκώσουν τα χέρια τους εκείνοι οι δύο παρατηρητές, που έχουν μπροστά τους τα δύο άκρα της ράβδου.

Αν x_A και x_B είναι οι συντεταγμένες των δύο αυτών (με $x_A > x_B$) τότε το μήκος της ράβδου στο σύστημα αναφοράς Σ θα είναι

$$L = x_A - x_B \, . \tag{4.6}$$

Εφαρμόζοντας την πρώτη από τις (4.2) στα γεγονότα "σύμπτωση του άκρου Α με τον παρατηρητή στο Α" και "σύμπτωση του άκρου Β με τον παρατηρητή στο Β" παίρνουμε

$$x'_A = \alpha_1 x + \alpha_2 t_A \quad , \quad x'_B = \alpha_1 x + \alpha_2 t_B \, . \tag{4.7}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη, χρησιμοποιούμε την $t_A = t_B$ και βρίσκουμε τη σχέση, που συνδέει τα μήκη της ράβδου κατά τους δύο παρατηρητές

$$x'_A - x'_B = \alpha_1 (x_A - x_B) \tag{4.8}$$

Ο τύπος της συστολής του μήκους στη συγκεκριμμένη περίπτωση γράφεται

$$x_A - x_B = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (x'_A - x'_B) \, , \tag{4.9}$$

και συγκρίνοντάς τον με την (4.8) καταλήγουμε στην

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \, . \tag{4.10}$$

Βήμα 3. Η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

Φανταστείτε, ότι κατά τη στιγμή της σύμπτωσης των αρχών των αξόνων των συστημάτων Σ και Σ' του Σχήματος 8 άναψε μια φωτεινή πηγή τοποθετημένη στην κοινή αρχή τους. Αφού το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα c τόσο ως προς τον Σ όσο και ως προς τον Σ', οι χωροχρονικές συντεταγμένες (x_M, t_M) κατά τον Σ και (x'_M, t'_M) κατά τον Σ', του προς τα δεξιά διαδιδόμενου μετώπου M του κύματος που εξέπεμψε η πηγή, ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x_M = ct_M \quad , \quad x'_M = ct'_M \, . \tag{4.11}$$

Με άλλα λόγια, η απόσταση x_M που κατά τον Σ διήνυσε το μέτωπο του κύματος σε χρόνο t_M ισούται με $x_M = ct_M$. Και αντίστοιχα για τον Σ' στις δικές του συντεταγμένες. Αντικαθιστώντας στην $c = x'_M/t'_M$ τα τονούμενα συναρτήσει των άτονων με βάση τις (4.2) και χρησιμοποιώντας την $x_M = ct_M$, παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{\alpha_1 c + \alpha_2}{\alpha_3 c + \alpha_4} = c \tag{4.12}$$

Βήμα 4. Η κίνηση της αρχής των αξόνων του Σ'.

Τέλος, κατά τον Σ η αρχή των αξόνων ($x' = 0$) του συστήματος Σ' εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση κατά τον άξονα x με σταθερή ταχύτητα V. Επομένως η τροχιά του περιγράφεται από την εξίσωση

$$x = Vt \, . \tag{4.13}$$

'Αρα, για κάθε t ισχύει $x' = 0 = \alpha_1 x + \alpha_2 t = (\alpha_1 V + \alpha_2)\, t$, και επομένως οι παράμετρες ικανοποιούν και τη σχέση

$$\alpha_1 V + \alpha_2 = 0 \, . \tag{4.14}$$

Από τις (4.5), (4.10), (4.12) και (4.14) παίρνουμε τελικά

$$\boxed{t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ y' = y \ , \ \ z' = z} \tag{4.15}$$

Αυτός είναι ο *μετασχηματισμός Lorentz*, που συνδέει τις χωροχρονικές συντεταγμένες των γεγονότων στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς Σ και Σ' του Σχήματος 8.

Η γραμμικότητα του μετασχηματισμού αυτού συνεπάγεται την ίδια σχέση για τις διαφορές των χωροχρονικών συντεταγμένων δύο γεγονότων ως προς τους Σ και Σ'. Πράγματι, γράφοντας τις (**??**) για δύο τυχόντα γεγονότα και αφαιρώντας κατά μέλη τις αντίστοιχες σχέσεις, προκύπτει ο μετασχηματισμός των διαφορών

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t - V\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ \Delta y' = \Delta y \ , \ \ \Delta z' = \Delta z} \tag{4.16}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz.

Ισοδύναμα, κάνοντας χρήση του κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων, εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε οτι ο μετασχηματισμός Lorentz (4.15) κατά την κατεύθυνση x, που περιοριστήκαμε εδώ, γράφεται και στη μορφή

$$\boxed{\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \Lambda(V) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}} \tag{4.17}$$

με τον πίνακα Lorentz $\Lambda(V)$

$$\boxed{\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & -\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{4.18}$$

όπου

$$\beta(V) \equiv \frac{V}{c}\,, \quad \gamma(V) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(V)}} \tag{4.19}$$

Η γενίκευση των παραπάνω για σχετική κίνηση σε τυχούσα κατεύθυνση και γενικό σχετικό προσανατολισμό των δύο συστημάτων είναι εύκολη και περιγράφεται ως άσκηση στο τέλος του Κεφαλαίου.

Ο μετασχηματισμός Poincaré

Γενικώτερα, μπορούμε στο σημείο $\{x = y = z = 0 = t\}$ να αντιστοιχίσουμε ένα τυχόν $\{x' = a_1, y' = a_2, z' = a_3, t' = a_0\}$, αντί για το ειδικό σημείο $\{x' = y' = z' = 0 = t'\}$ της σχέσης (4.1). Αυτό αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση της αρχής του συστήματος χωροχρονικών συντεταγμένων του Σ' από την αρχή του Σ κατά αυθαίρετες ποσότητες στους τέσσερις άξονες. Τότε αντί για τις σχέσεις μετασχηματισμού (reflorentz) καταλήγομε στον

$$\boxed{t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + a_0\ ,\ \ x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + a_1\ ,\ \ y' = y + a_2\ ,\ \ z' = z + a_3} \tag{4.20}$$

που ονομάζεται μετασχηματισμός Poincaré.

Ωστόσο, είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός των διαφορών των συντεταγμένων δύο γεγονότων παραμένει ο (4.16) .

Ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου

$$x' = x - Vt + a_1\ ,\ \ t' = t + a_0\ ,\ \ y' = y + a_2\ ,\ \ z' = z + a_3\,, \tag{4.21}$$

που περιγράφει στη Νευτώνεια μηχανική τη σχέση των συντεταγμένων δύο αδρανειακών συστημάτων, είναι αναμενόμενο να προκύπτει ως το όριο του μετασχηματισμού Poincaré για $c \to \infty$. Πράγματι, στο όριο αυτό ο μετασχηματισμός (4.20) ανάγεται στον (4.21).

Κινούμενος δίσκος ή σφαίρα

Δίσκος ακτίνας R (στο σύστημα ηρεμίας του) κινείται με ταχύτητα V ως προς παρατηρητή Σ. Ως προς τον Σ ο δίσκος έχει το σχήμα έλλειψης με μικρό ημιάξονα $R\sqrt{1 - V^2/c^2}$ στη κατεύθυνση της κίνησης και μεγάλο ημιάξονα R κάθετα στη σχετική ταχύτητα.

Πράγματι, στο σύστημα ηρεμίας το όριο του δίσκου είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = R^2$. Συναρτήσει των συντεταγμένων του Σ αυτός γράφεται $(x'+Vt')^2/(1-V^2/c^2)+y'^2 = R^2$, που είναι η εξίσωση έλλειψης με κέντρο το σημείο $(x' = -Vt', y' = 0)$ και ημιάξονες $R\sqrt{1 - V^2/c^2}$ και R στις κατευθύνσεις x' και y', αντίστοιχα.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ο παρατηρητής αυτός Σ θα βλέπει μια σφαίρα ακτίνας R ως ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα $x \equiv x'$ της κίνησής της και πεπλατυσμένο στην κατεύθυνση x κατά τον παράγοντα $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Σχήμα με τα ηλεκτρικά πεδία ακίνητου και κινούμενου φορτίου.

Σχήμα 10: Το ηλεκτρικό πεδίο ακίνητου (α) και κινούμενου (β) φορτίου.

Οι Νόμοι του Ηλεκτρομαγνητισμού και η συστολή του μήκους

'Οπως θα αποδειχθεί σε άλλο κεφάλαιο, οι εξισώσεις Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού είναι "συναλλοίωτες", δηλαδή έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, με τον μετασχηματισμό Lorentz (4.15) να συνδέει δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα με σχετική ταχύτητα V. Συνέπεια του παραπάνω, θα δούμε, είναι ότι ενώ το ηλεκτρικό πεδίο ενός ακίνητου φορτίου είναι σφαιρικά συμμετρικό, όπως δείχνει το Σχήμα 10 α, όταν το φορτίο κινείται, το πεδίο του παίρνει τη μορφή του Σχήματος 10 β, συμπιεσμένη στη κατεύθυνση της κίνησής του. Επομένως, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα σε δύο γειτονικά φορτία μικραίνει, όταν αυτά κινούνται στην κατεύθυνση της ευθείας που τα συνδέει, μειώνοντας την μεταξύ τους ηλεκτροστατική δύναμη. Το ίδιο ισχύει και με όλες τις δυνάμεις και τους νόμους στη φύση, με τελικό αποτέλεσμα τα άτομα μιας κινούμενης ράβδου να ισσοροπούν σε απόσταση από τα γειτονικά τους μικρότερη κατά τον παραπάνω παράγοντα, κάνοντας, εν τέλει, και το μήκος της ράβδου μικρότερο κατά $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Η στοιχειώδης χωροχρονική απόσταση. Χωρόχρονος Minkowski

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (4.16) εύκολα επαληθεύετε ότι

$$\boxed{c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} \tag{4.22}$$

δηλαδή, η ποσότητα

$$\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{4.23}$$

ή ισοδύναμα με τη μορφή διαφορικών

$$\boxed{ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \tag{4.24}$$

είναι **αναλλοίωτη** ως προς τις μετατοπίσεις στο χώρο και το χρόνο, ως προς τις στροφές στο χώρο, καθώς και ως προς τους γνήσιους μετασχηματισμούς Lorentz [11]. Η ποσότητα Δs ονομάζεται *χωροχρονική απόσταση* των δύο γεγονότων με διαφορές χωροχρονικών συντεταγμένων $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Αντίστοιχα, η ποσότητα ds είναι το *στοιχείο μήκους του χωρόχρονου Minkowski*, που θα μελετήσουμε λεπτομερώς σε άλλο κεφάλαιο.

Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού (4.15)

Πρόκειται για τις σχέσεις, που δίνουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος στο σύστημα Σ του Σχήματος 8 από αυτές στο σύστημα Σ'. 'Ενας τρόπος προσδιορισμού τους είναι με επίλυση των (4.15) ως προς x, t συναρτήσει των x', t', που οδηγεί στις σχέσεις

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \ , \ \ y = y' \ , \ \ z = z' \tag{4.25}$$

Ενας άλλος τρόπος να αποδείξει κανείς τις σχέσεις αυτές είναι να σκεφτεί οτι αν για τον παρατηρητή Σ' ο Σ κινείται με ταχύτητα V προς τα *αριστερά* στο Σχήμα 1, ο Σ βλεπει τον Σ' να κινείται με ταχύτητα V προς τα *δεξιά*. Αρα παίρνομε τον μετασχηματισμό από το σύστημα Σ' στο Σ αντικαθιστώντας το V στις (4.15) με $-V$.

Αλλοιώς, μπορεί να σκεφτεί κανείς οτι γενικά, ο αντίστροφος ενός μετασχηματισμού είναι ένας άλλος μετασχηματισμός, που αν συνδυαστεί με τον αρχικό, μας οδηγεί στον ταυτοτικό μετασχηματισμό, δηλαδή σε καθόλου αλλαγή συστήματος. Το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού Lorentz με ταχύτητα V εξουδετερώνεται από άλλον με ταχύτητα $-V$.

Τέλος, για όσους προτιμάνε να σκέφτονται αλγεβρικά, απλά ας παρατηρήσουν οτι

$$\Lambda(V)\Lambda(-V) = \mathbf{1} \ \ \rightarrow \ \ \Lambda(V)^{-1} = \Lambda(-V) \tag{4.26}$$

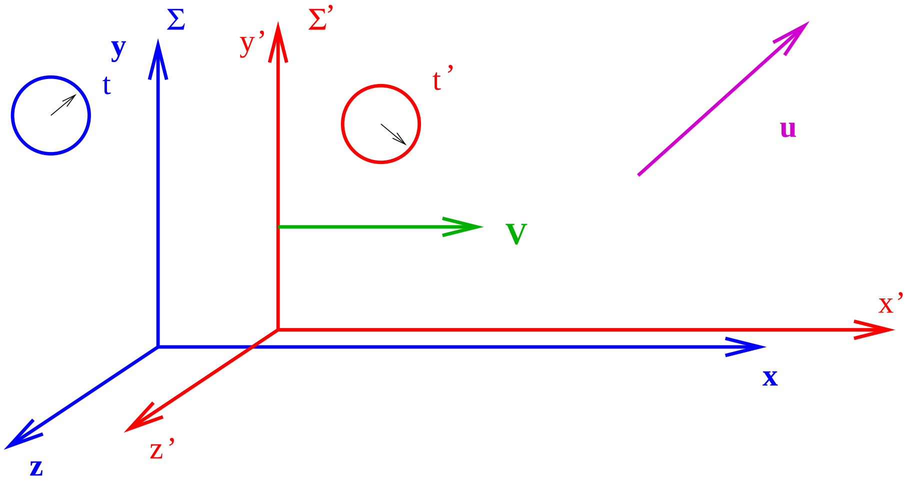
όπου **1** συμβολίζει τον ταυτοτικό πίνακα μονάδα.

4.2 Μετασχηματισμός της ταχύτητας

Ας πάρουμε τώρα ένα τρένο (Σ') να κινείται με ταχύτητα V ως προς τη Γη (Σ). Οι παρατηρητές Σ και Σ' παρατηρούν την κίνηση κάποιου σώματος, όπως δείχνει το παρακάτω Σχήμα 11.

Το ερώτημα που θα απαντήσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι: *'Αν (u_x, u_y, u_z) είναι οι συντεταγμένες της ταχύτητας του σώματος αυτού σύμφωνα με τον Σ, ποιές θα είναι οι (u'_x, u'_y, u'_z) που θα μετρήσει ο Σ';*

[11] Η δήλωση αυτή έχει το εξής ανάλογο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο: Η απόσταση $\Delta s_E^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ δύο σημείων στο χώρο είναι αναλλοίωτη ως προς τις στροφές. Οι μετασχηματισμοί Lorentz στο χωρόχρονο είναι το ανάλογο των στροφών στον Ευκλείδειο χώρο. Οι δύο αυτές ομάδες μετασχηματισμών αφήνουν αναλλοίωτη την αντίστοιχη απόσταση.



Σχήμα 11: Οι Σ και Σ' παρατηρούν σώμα κινούμενο στο χώρο

Εστω μια απειροστά μικρή μεταβολή στη θέση του σώματος, που λαμβάνει χώρα σε ένα απειροστά μικρό χρονικό διάστημα Δt. Οι μεταβολές αυτές είναι $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ κατά τον Σ, και αντίστοιχα $(\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t')$, που υπολογίζονται απο τις (4.15), κατά τον Σ'.

Επομένως, οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος ως προς τον Σ' θα είναι

$$u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - V\Delta x/c^2} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \tag{4.27}$$

$$u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\frac{u_y}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \tag{4.28}$$

και

$$u_z' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\frac{u_z}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \tag{4.29}$$

Σχόλιο 1: Οι νέοι τύποι σύνθεσης ταχυτήτων που μόλις αποδείξαμε ανάγονται στους πιο γνώριμούς μας από τη Νευτώνεια μηχανική στο όριο των μικρών ταχυτήτων. Πράγματι για V/c και $|\mathbf{u}|/c$ πολύ μικρότερα από τη μονάδα, παίρνομε

$$u_x' \to u_x - V \ , \ \ u_y' \to u_y \ , \ \ u_z' \to u_z \tag{4.30}$$

Σχόλιο 2: Οι παραπάνω τύποι σύνθεσης ταχυτήτων συνεπάγονται οτι το φώς κινείται με την ίδια ταχύτητα c ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

Πράγματι, αν το σώμα που μελετάμε παραπάνω είναι ένα φωτόνιο που κινείται στην κατεύθυνση x, φυσικά με ταχύτητα $u_x = c$, η ταχύτητά του ως προς τον Σ' θα είναι

$$u_x' = \frac{c - V}{1 - V/c} = c \tag{4.31}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, αφού η ιδιότητα αυτή του φωτός χρησιμοποιήθηκε ήδη στην απόδειξη του μετασχηματισμού Lorentz.

Σχόλιο 3: Τα σχόλια 1 και 2 που μόλις κάναμε είναι πολύ χρήσιμα ως μνημονικός κανόνας, προς αποφυγή λαθών στον τύπο σύνθεσης ταχυτήτων, που πρέπει κανείς να χρησιμοποιήσει σε διάφορες εφαρμογές.

4.3 Μετασχηματισμός της επιτάχυνσης

Κατ' αναλογίαν με τον μετασχηματισμό της ταχύτητας που αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορεί κανείς να υπολογίσει την επιτάχυνση (a_x', a_y', a_z') σώματος ως προς το σύστημα Σ, συναρτήσει της επιτάχυνσης (a_x, a_y, a_z) του σώματος αυτού ως προς το Σ και της σχετικής ταχύτητας V των δύο συστημάτων.

Χρησιμοποιείστε την (4.27) και επαληθεύσετε οτι για το σκηνικό του Σχήματος 8 ισχύει:

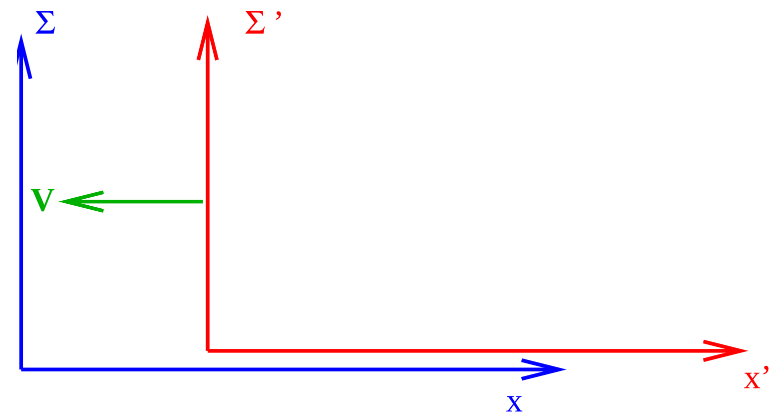
$$a'_x \equiv \frac{dv'_x}{dt'} = a_x \frac{\left(1 - V^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1 - V v_x/c^2\right)^3} \tag{4.32}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιώντας τις (4.16) να αποδείξετε (α) ότι δύο γεγονότα ταυτόχρονα και στην ίδια θέση ως προς ένα σύστημα Σ, συμβαίνουν ταυτόχρονα και στη ίδια θέση ως προς άλλο Σ', που κινείται ως προς το αρχικό, και (β) δύο γεγονότα ταυτόχρονα αλλά σε διαφορετικές θέσεις ως προς τον Σ, δεν είναι ταυτόχρονα ως προς τον Σ'.

2. Θεωρείστε τα αδρανειακά συστήματα Σ και Σ' του Σχήματος 8 με $V = c/2$. Δύο γεγονότα Α και Β περιγράφονται στο Σ με χωροχρονικές συντεταγμένες (x_A, ct_A)=(1m, 2m) και $(x_B = 3m, ct_B = 5m)$, αντίστοιχα.
(α) Ποιές είναι οι συντεταγμένες των Α και Β στο σύστημα Σ';
(β) Πόση είναι η χωρική και πόση η χρονική απόσταση των Α και Β ως προς τους Σ και Σ';
(γ) Πόση είναι η αναλλοίωτη χωροχρονική απόσταση Δs των Α και Β;

3. Να γράψετε το μετασχηματισμό Lorentz από το σύστημα Σ στο Σ' του σχήματος που ακολουθεί.



Σχήμα 12: Το Σ' κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση x σε σχέση με το Σ

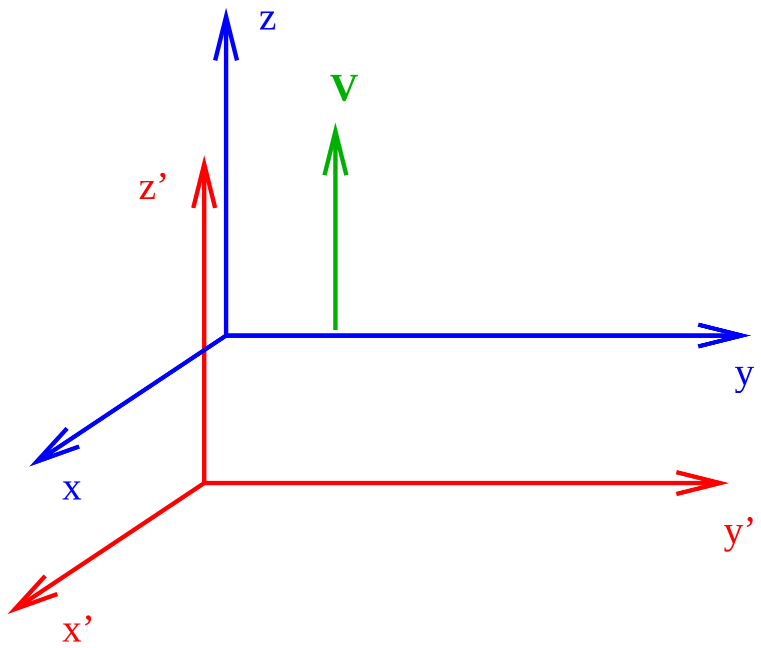
4. Ομοίως για την περίπτωση του παρακάτω Σχήματος 13

**5. Δύο διαστημόπλοια Α και Β βρίσκονται το ένα πίσω από το άλλο και σε ίση απόσταση από τρίτο Γ. Τα Α και Β συνδέονται με ένα τεντωμένο εύθραυστο νήμα. Κάποια στιγμή ο Γ στέλνει ένα σήμα και τα Α και Β ανάβουν τις μηχανές τους και αρχίζουν να επιταχύνονται απαλά και με το ίδιο ακριβώς πρόγραμμα ταξιδιού, που τους δίνει σε κάθε χρονική στιγμή την ίδια ακριβώς επιτάχυνση. Ετσι η ταχύτητά τους να αυξάνεται σιγά-σιγά και με τον ίδιο τρόπο. Ζητείται να αποφασίσετε κατά πόσον το νήμα θα σπάσει κάποια στιγμή ή όχι [7].

**6. Να αποδείξετε ότι ο μετασχηματισμός (4.20) είναι ο πιό γενικός μετασχηματισμός των συντεταγμένων, που αφήνει την ποσότητα $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$ αναλλοίωτη [12].

7. Δύο γαλαξίες απομακρύνονται από εμάς σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $0.5c$ και $0.9c$.
(α) Πόση είναι η ταχύτητα του ενός ως προς τον άλλο;
(β) Πόση είναι η "σχετική τους ταχύτητα" ως προς εμάς;

[12]Μία απόδειξη μπορείτε να βρείτε στο Κεφάλαιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας του βιβλίου του S. Weinberg "Gravitation", J. Wiley, 1972.



Σχήμα 13: Το Σ κινείται ως προς το Σ' κατά τη θετική κατεύθυνση z

8. Να αποδείξετε ότι το μέτρο της ταχύτητας v σώματος αλλάζει με μετασχηματισμό Lorentz με σχετική ταχύτητα V σε v', που ικανοποιεί τη σχέση

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{1 - V^2/c^2}{(1 + Vv_x/c^2)^2}\,, \tag{4.33}$$

όπου v_x η x-συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος ως προς το αρχικό σύστημα.

9. Φωτεινή ακτίνα εκπέμπεται στη κατεύθυνση y του συστήματος Σ. Να υπολογιστούν (α) οι συντεταγμένες της ταχύτητας της ακτίνας ως προς σύστημα Σ', που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα V στη κατεύθυνση του αρνητικού άξονα των x, και (β) το μέτρο της ταχύτητας της ακτίνας ως προς τον Σ'.

10. Σώμα κινείται στο επίπεδο $x - y$ συστήματος Σ με ταχύτητα που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x. Να υπολογίσετε τη γωνία θ' της ταχύτητάς του ως προς σύστημα Σ', που κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ στη κατεύθυνση του άξονα των x.

11. *Ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz.*

5 Σχετικιστική Μηχανική

Στις σημειώσεις αυτές επιλέξαμε να παρουσιάσουμε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας με αφετηρία τα δύο αξιώματα και με την βοήθεια απλών νοητικών πειραμάτων της μηχανικής, με τρένα, ράβδους και διαστημόπλοια. Ισοδύναμα, και πιό κοντά στο πώς έγιναν τα πράγματα ιστορικά, μπορεί κανείς να ξεκινήσει με την παρατήρηση οτι η θεωρία του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. 'Ηδη οι εξισώσεις της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο κενό εμπεριέχουν την ταχύτητα του φωτός ως μια σταθερά, που δεν αλλάζει με μετασχηματισμούς Lorentz. Επομένως, οι μετασχηματισμοί Lorentz, αφ' ενός είναι συμμετρία της θεωρίας των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, και αφ' ετέρου έχουν ως όριο για μικρές ταχύτητες τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου της Νευτώνειας μηχανικής. Αρα, είναι λογικό να συμπεράνουμε, ότι οι "σωστοί" μετασχηματισμοί, που συνδέουν δύο αδρανειακούς παρατηρητές γενικά, είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz και ότι, επιπλέον, η Νευτώνεια μηχανική δεν είναι παρά μια προσέγγιση της "Σχετικιστικής Μηχανικής", όπως ονομάζουμε την ακριβή θεωρία των μηχανικών φαινομένων, που είναι και αυτή αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz. Η διατύπωση της Σχετικιστικής Μηχανικής είναι το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

5.1 Η ορμή σώματος

Στην εισαγωγή στην αρχή του βιβλίου αυτού πειστήκαμε με μερικά παραδείγματα, οτι οι τύποι του Νεύτωνα για την ενέργεια και την ορμή ελεύθερου σώματος δεν μπορεί να είναι σωστοί. Ποιοί είναι όμως οι σωστοί;

Η διατύπωσή τους είναι το αντικείμενο των δύο παραγράφων που ακολουθούν. Στην πρώτη θα αποδειχθεί κάνοντας χρήση του νόμου σύνθεσης ταχυτήτων, που αποδείξαμε παραπάνω με βάση τον μετασχηματισμό Lorentz και ενός απλού "νοητικού πειράματος" σκέδασης, οτι ο τύπος του Νεύτωνα $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ για την ορμή ενός σώματος δεν είναι σωστός. Στην δεύτερη, θα δοθεί ο σωστός τύπος της ορμής και ο Νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση σώματος υπό την επίδραση τυχούσας δύναμης. Ο τελευταίος θα οδηγήσει στη συνέχεια στον σωστό τύπο της ενέργειας και στην έννοια της ενέργειας ηρεμίας ενός σώματος.

Η πλήρης θεωρητική αιτιολόγηση της ορθότητας και του μονοσήμαντου των εκφράσεων της ορμής και της ενέργειας, που θα παρουσιαστούν εδώ, θα γίνει στο Κεφάλαιο 9. Βεβαίως, η συνεχής και με εξαιρετική ακρίβεια επαλήθευση των προβλέψεων της Ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας στα πειράματα και στην καθημερινή εμπειρία, είναι ακόμα πιό ασφαλές κριτήριο για την ορθότητά τους.

Ενα απλό πείραμα

Οπως έχουμε αναφέρει θεωρούμε βασική και αδιαφιλονίκητη την υπόθεση της ομοιογένειας του χώρου. Κατά συνέπεια πιστεύουμε ότι σε κάθε κλειστό σύστημα υπάρχει μια διανυσματική ποσότητα, που ονομάζουμε ορμή, και η οποία είναι σταθερά της κίνησης του συστήματος αυτού. Μάλιστα, σύμφωνα με το Αξίωμα της Σχετικότητας, που έχουμε υποθέσει, ο νόμος της διατήρησης της ορμής θα πρέπει να ισχύει ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

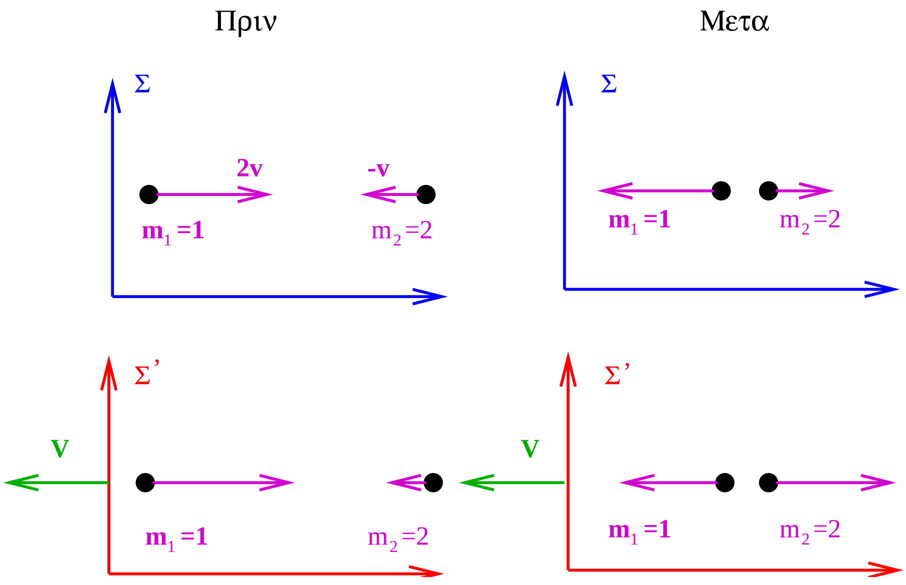
Σύμφωνα με τη Νευτώνεια μηχανική η ορμή συστήματος σωμάτων με μάζες m_a και ταχύτητες $\mathbf{v}_a$ δίδεται από τη σχέση

$$\mathbf{P}_N = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \,. \tag{5.1}$$

Με την εις άτοπον απαγωγή θα αποδείξουμε τώρα ότι ο τύπος αυτός δεν είναι σωστός. Συγκεκριμμένα, θα θεωρήσουμε ένα πείραμα σκέδασης, για το οποίο ένας αδρανειακός παρατηρητής Σ θα συμπεράνει ότι η ολική ορμή $\mathbf{P}_N$ διατηρείται, ενώ δεν θα συμβαίνει το ίδιο ως προς άλλο αδρανειακό παρατηρητή Σ' σε κίνηση ως προς τον Σ.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε το πείραμα σκέδασης του Σχήματος 14, όπως περιγράφεται στο σύστημα αναφοράς Σ. 'Εχουμε δύο ίσες μάζες m με ταχύτητες αρχικά u και $-u$ στην κατεύθυνση x και τελικά u και $-u$ στην y. Η ισότητα των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν και μετά τη σκέδαση αυτή επιβάλλεται από το νόμο διατήρησης της ενέργειας, τον οποίο υποθέτουμε επίσης, χωρίς να υποθέτουμε κάποια συγκεκριμμένη έκφραση για την ενέργεια, πέραν του ότι θα έχει τη γενική μορφή $E = E(m, v, c)$, δηλαδή θα εξαρτάται μόνο από τη μάζα και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος και από την ταχύτητα του φωτός.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο του Νεύτωνα βρίσκουμε ότι η ολική ορμή τόσο πριν όσο και μετά τη σκέδαση είναι μηδέν. Επομένως, ο παρατηρητής Σ συμπεραίνει ότι στο πείραμα του Σχήματος 14 ισχύει ο νόμος διατήρησης της ορμής.



Σχήμα 14: Ενα απλό πείραμα σκέδασης. ΝΑ ΑΛΛΑΞΕΙ ΩΣ ΕΞΗΣ: Ως προς τον Σ αρχικά έχουμε δύο ίσες μάζες m με ταχύτητες u και $-u$ κατά τον x. Τελικά έχουν αντίστοιχα ταχύτητες u και $-u$ κατά τον y. Η ενέργεια και η ορμή διατηρούνται κατά τον Σ. Κατά τον Σ' αρχικά οι ταχύτητες είναι u_A και u_B στην κατεύθυνση x, ενώ τελικά $\mathbf{v}_A$ και $\mathbf{v}_B$, αντίστοιχα. Η ταχύτητα του Σ' ως προς τον Σ είναι V στη θετική κατεύθυνση x.

Ας δούμε όμως τί θα συμπεράνει για την ίδια σκέδαση παρατηρητής Σ', που κινείται ως προς τον Σ με σχετική ταχύτητα V, όπως δείχνει το Σχήμα 14. Κάνοντας χρήση των τύπων μετασχηματισμού των ταχυτήτων, που αποδείξαμε παραπάνω με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz, οι ταχύτητες u_A και u_B των δύο σωμάτων πριν τη σκέδαση είναι κατά τον Σ':

$$u_A = \frac{u - V}{1 - \frac{Vu}{c^2}}\ ,\quad u_B = \frac{-u - V}{1 + \frac{Vu}{c^2}} \tag{5.2}$$

και, αντίστοιχα, οι ταχύτητες $\mathbf{v}(A)$ και $\mathbf{v}(B)$ μετά τη σκέδαση έχουν συνιστώσες

$$v_x(A) = -V = v_x(B)\,,\quad v_y(A) = u\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = -v_y(B) \tag{5.3}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τον τύπο της ορμής για να υπολογίσουμε την ολική ορμή πριν και μετά τη σκέδαση ως προς τον Σ'. Στην κατεύθυνση y η ολική ορμή είναι μηδέν τόσο πριν όσο και μετά τη σκέδαση και επομένως διατηρείται και κατά τον Σ'. Δεν συμβαίνει το ίδιο και με την x συνιστώσα. Πριν τη σκέδαση, η ολική Νευτώνεια ορμή στην κατεύθυνση x είναι

$$P_x^{initial} = mu_A + mu_B = m\left(\frac{u - V}{1 - Vu/c^2} - \frac{u + V}{1 + Vu/c^2}\right) = -2mV\frac{1 - u^2/c^2}{1 - V^2u^2/c^4} \tag{5.4}$$

ενώ μετά

$$P_x^{final} = mv_x(A) + mv_x(B) = -2mV \neq P_x^{initial}\,. \tag{5.5}$$

Συνεπώς, κατά τον Σ' η ορμή στην κατεύθυνση x δεν διατηρείται!

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων, που αποδείξαμε με βάση τα δύο αξιώματα της Σχετικότητας, ο νόμος διατήρησης της ορμής και η Νευτώνεια έκφραση για την τελευταία, δεν είναι και τα τρία σωστά. Για τους λόγους που έχουν αναλυθεί, θα επιμείνουμε στα δύο πρώτα και θα αναζητήσουμε τη σωστή έκφραση για την ορμή του υλικού σημείου.

Η σχετικιστική ορμή σώματος

Η σωστή έκφραση της ορμής σώματος μάζας M, που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ θα πρέπει (α) να εξαρτάται μόνο από τη μάζα m, την ταχύτητα $\mathbf{v}$ του σώματος και την ταχύτητα του φωτός, (β) να είναι διάνυσμα, και (γ) για ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός να ανάγεται στη Νευτώνεια έκφραση. 'Αρα, η υπο αναζήτηση σχετικιστική ορμή θα έχει τη γενική μορφή $\mathbf{p} = m\mathbf{v}f(v^2/c^2)$, με την συνάρτηση f να γράφεται στη μορφή $f(w) = 1 + \alpha w + \beta w^2 + \ldots$ για $w \ll 1$.

Επομένως, θα αναζητήσουμε τη σχετικιστική ορμή στη μορφή

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\left(1 + \alpha\frac{v^2}{c^2} + \beta(\frac{v^2}{c^2})^2 + \ldots\right) \tag{5.6}$$

και θα προσδιορίσουμε, τους συντελεστές $\alpha, \beta, \ldots$ έτσι ώστε οι παρατηρητές Σ και Σ' να συμφωνούν ως προς την διατήρησή της στην παραπάνω σκέδαση.

Κατ' αρχήν, ως προς τον Σ, η σκέδαση του Σχήματος 14 είναι απολύτως συμμετρική πριν και μετά και εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι και η νέα ορμή, επίσης διατηρείται σ' αυτήν, και μάλιστα για τυχούσα συνάρτηση $f(v^2/c^2)$,

Ας δούμε τώρα τί λέει ο Σ'. (α) Στην κατεύθυνση y η ολική ορμή διατηρείται και ως προς τον Σ'. Πράγματι, αρχικά τα δύο σώματα είχαν το καθένα μηδενική y συνιστώσα της ταχύτητας και επομένως και της ορμής του. Μετά τη σκέδαση, οι y συνιστώσες των ταχυτήτων τους (5.3) είναι αντίθετες και, επίσης, ισχύει $\mathbf{v}_A^2 = \mathbf{v}_B^2 = u^2 + V^2(1-u^2)$. Συνεπώς, η y συνιστώσα της ολικής ορμής τελικά μηδενίζεται και πάλι για τυχούσα συνάρτηση f, κάνοντας τον Σ' να συμφωνήσει με τον Σ ως προς την διατήρηση της νέας P_y.

(β) Στην κατεύθυνση x τα πράγματα είναι διαφορετικά. 'Οπως θα διαπιστώσουμε ευθύς αμέσως, δεν ισχύει διατήρηση της ολικής ορμής P_x, παρά μόνο για ειδικές τιμές των $\alpha, \beta, \ldots$.

Πράγματι, με βάση τις (5.3) και (5.6), η x συνιστώσα της ολικής τελικής ορμής για μικρές τιμές της σχετικής ταχύτητας $V \ll c$ των Σ και Σ'

$$P_x^{final} = -2mV[1 + \alpha(u^2/c^2) + (V^2/c^2)(1 - u^2/c^2))] \simeq -2mV\left(1 + \alpha\frac{u^2}{c^2} + \mathcal{O}(V^2/c^2)\right) \tag{5.7}$$

Με τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστούμε τις (5.2) στην (5.6) και γράφουμε την έκφραση για την x συνιστώσα $P_x^{initial}$ της αρχικής ολικής ορμής, την αναπτύσουμε σε δυνάμεις του V/c και κρατάμε τον κύριο όρο. Το αποτέλεσμα είναι:

$$P_x^{initial} \simeq -2mV\left(1 + (3\alpha - 1)\frac{u^2}{c^2} + \mathcal{O}(V^2/c^2)\right) . \tag{5.8}$$

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές εκφράσεις, βλέπουμε ότι για

$$\alpha = \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

ταυτίζονται και έτσι με αυτή την ακρίβεια ο Νόμος διατήρησης της ορμής (5.6) στη σκέδαση του Σχήματος 14 ισχύει και για τους δύο παρατηρητές.

Συνεχίζοντας τη μέθοδο αυτή, αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha = 1/2$ στην (5.6), υπολογίζουμε από την αρχή τις εκφράσεις των P_x^{final} και $P_x^{initial}$, αναπτύσουμε και τις δύο σε δυνάμεις του V/c, κρατώντας τους όρους μέχρι και τάξη V^3/c^3. 'Εχοντας επιλέξει $\alpha = 1/2$ οι όροι τάξης V/c ταυτίζονται και το επόμενο ερώτημα είναι ο προσδιορισμός του β ώστε οι P_x^{final} και $P_x^{initial}$ να είναι ίσες μέχρι και τάξη V^3/c^3. 'Ετσι, βρίσκουμε $\beta = 3/8$ και επομένως η (5.6) γίνεται

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}(\frac{v^2}{c^2})^2 + \ldots\right) . \tag{5.10}$$

Η ποσότητα στην παρένθεση είναι οι τρείς πρώτοι όροι του αναπτύγματος της συνάρτησης $f(v^2/c^2) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Το προφανές επόμενο βήμα είναι να "μαντέψουμε" ότι ο σωστός τύπος της σχετικιστικής ορμής είναι

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{5.11}$$

και να επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι ικανοποιεί ακριβώς, χωρίς καμμία προσέγγιση, τις απαιτήσεις για την ορμή ελεύθερου υλικού σημείου.

Αντίστοιχα, η ορμή συστήματος σωμάτων με μάζες M_a και ταχύτητες $\mathbf{v}_a$, $a = 1, 2, 3, \ldots$ είναι

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{M_a\mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}}} \tag{5.12}$$

Ο Νόμος διατήρησης της ορμής ελεύθερου σώματος ως προς οποιονδήποτε *αδρανειακό* παρατηρητή είναι

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0} \tag{5.13}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση κίνησης ελεύθερου σώματος. Η ορμή ενός τέτοιου σώματος είναι σταθερή.

Σώμα υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης F κινείται σε οποιοδήποτε *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς, σύμφωνα με την εξίσωση του Νεύτωνα

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}} \tag{5.14}$$

Η ορμή σώματος υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης **F** δεν είναι σταθερή. Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω του στό δεδομένο σύστημα αναφοράς. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης ισχύουν *μόνο σε αδρανειακά συστήματα* αναφοράς. Οπως έχουμε εξηγήσει στο Κεφάλαιο 2, η (5.13) για ελεύθερα σώματα ουσιαστικά ορίζει τα συστήματα αυτά. Ενας μη αδρανειακός παρατηρητής δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει τις απλές αυτές εξισώσεις κίνησης. Για παράδειγμα, όπως έχουμε αναφέρει, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός ελεύθερου σώματος ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς έχει στο δεύτερο μέλος την φυγόκεντρο και τη δύναμη Coriolis, που είναι και οι δύο "φανταστικές".

5.2 Η ενέργεια σώματος - Ενέργεια ηρεμίας

Θα πάρουμε τώρα ένα σώμα, που είναι αρχικά ακίνητο στη θέση x_1 του άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Μιά μεταβαλλόμενη εν γένει δύναμη F(x) ασκείται πάνω του, πάντα στην κατεύθυνση x, υπό την επίδραση της οποίας το σώμα μετατοπίζεται πάνω στον άξονα των x [13]. Εστω v η ταχύτητα του σώματος όταν αυτό θα βρίσκεται στη θέση x_2.

Γνωρίζετε από την μηχανική οτι το έργο $W(x_1, x_2)$, που καταναλώθηκε από την δύναμη πάνω στο σώμα κατά την μετατόπιση του τελευταίου από την αρχική θέση x_1 στην τελική x_2, ή ισοδύναμα από την αρχική ταχύτητα μηδέν στην τελική v, ισούται προς την μεταβολή της ενέργειας του σώματος. Μάλιστα, αφού το σώμα ξεκίνησε από ηρεμία το έργο αυτό θα ισούται με την κινητική ενέργεια K(v), που απέκτησε τελικά.

Γράφουμε λοιπόν

$$W(x_1, x_2) = E_{final} - E_{initial} = K(v) \tag{5.15}$$

Γνωρίζετε ακόμα οτι το έργο που δαπανήθηκε από το πεδίο δυνάμεων F(x) για τη μετακίνηση του σώματος από την αρχική θέση στην τελική, δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp(x(t))}{dt} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} dx \\ &= \int_0^v \frac{dp}{dv} v dv = \int_0^v \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} v dv \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \\ &\equiv K(v) \end{aligned} \tag{5.16}$$

όπου στο τελευταίο βήμα έγινε χρήση της (5.15).

Επομένως, η κινητική ενέργεια σώματος με μάζα m και ταχύτητα v δίδεται από τη σχέση

$$\boxed{K(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2} \tag{5.17}$$

[13] Για απλότητα περιορίζουμε την κίνηση του σώματος στον άξονα x. Εύκολα γενικεύει κανείς τη συζήτηση σε τρισδιάστατες κινήσεις. Τα βασικά συμπεράσματα δεν αλλάζουν.

ενώ, συγκρίνοντας την προτελευταία γραμμή της (5.16) με τη δεύτερη ισότητα στην (5.15), συμπεραίνουμε ότι η ολική ενέργεια σώματος με μάζα m και ταχύτητα v είναι

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{5.18}$$

Μερικά σημαντικά σχόλια έχουν τώρα σειρά:

(1) Σε αντίθεση με αυτά που μάθατε στη Νευτώνεια μηχανική, ένα *ακίνητο σώμα με μάζα m* έχει ενέργεια

$$\boxed{E_0 = mc^2} \tag{5.19}$$

την οποία ονομάζομε για προφανείς λόγους **ενέργεια ηρεμίας του σώματος**.

(2) Χρησιμοποιώντας την (5.18) μπορείτε να γράψετε την ορμή (5.11) στη μορφή

$$\mathbf{p} = \frac{E\,\mathbf{v}}{c^2} \tag{5.20}$$

(3) Χρησιμοποιείστε τις εκφράσεις (5.18) και (5.11) της ενέργειας και της ορμής σώματος μάζας m, που αποδείξαμε παραπάνω, και επαληθεύσετε τη σχέση

$$\boxed{E^2 - c^2\mathbf{p}^2 = m^2c^4} \tag{5.21}$$

Σωμάτια με μηδενική μάζα

Ποιά είναι η ενέργεια και η ορμή σωματίων με μάζα μηδέν, όπως τα φωτόνια, πιθανόν τα ελαφρύτερα νετρίνα (ν_e), ή τα βαρυτόνια;

Από την (5.21) συμπεραίνετε ότι για σωμάτια με μηδενική μάζα ισχύει

$$\boxed{E = |\mathbf{p}|c} \tag{5.22}$$

Συνδυάζοντας τη σχέση αυτή με την (5.20) προκύπτει ότι για τα σωμάτια αυτά ισχύει επίσης ότι

$$v = c\,. \tag{5.23}$$

Αρα, σωμάτια με μηδενική μάζα κινούνται **υποχρεωτικά** με την ταχύτητα του φωτός και η ενέργειά τους ισούται με το γινόμενο του μέτρου της ορμής τους επί c. Και αντιστρόφως, σωμάτια που κινούνται με τη ταχύτητα του φωτός έχουν με βάση τις σχέσεις (5.20) και (5.21) αναγκαστικά μάζα μηδέν.

Ετσι οι σχέσεις (5.18) και (5.11) για την ενέργεια και την ορμή αντίστοιχα σωματιδίου με μηδενική μάζα, οδηγούν σε απροσδιοριστία της μορφής 0/0. Η ενέργεια και η ορμή ξεχωριστά δεν υπολογίζονται από τις σχέσεις αυτές. Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας μας δίνει μόνο τη σχέση (5.22) ανάμεσα στις δύο αυτές ποσότητες. Αν γνωρίζομε την ενέργεια ενός φωτονίου, τότε από τον τύπο αυτό υπολογίζομε την ορμή του, και αντίστροφα [14].

Ειδικά για φωτόνιο ακτινοβολίας συχνότητας f γνωρίζετε ότι έχει ενέργεια $E = hf$. Το μέτρο της ορμής αυτού του φωτονίου είναι

$$|\mathbf{p}| = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}\,. \tag{5.24}$$

[14] Όπως έχομε εξηγήσει, η Νευτώνεια μηχανική είναι βασισμένη στην υπόθεση ύπαρξης παγκόσμιου χρόνου, κοινού σε όλους τους παρατηρητές στο Σύμπαν. Αυτό προυποθέτει την δυνατότητα μεταβίβασης πληροφορίας με άπειρη ταχύτητα. Αν υποθέσομε οτι ένα σωμάτιο με μάζα μηδέν, έχει αναγκαστικά άπειρη ταχύτητα, τότε οι τύποι του Νεύτωνα για την ενέργεια και την ορμή ενός τέτοιου σωματιδίου θα οδηγούσαν σε απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot \infty$ για τις δύο αυτές ποσότητες. Ομως, σε αντίθεση με τον τύπο (5.21), η σχέση που συνδέει την ενέργεια με την ορμή στην Νευτώνεια μηχανική $E = p^2/2m$ *δεν* είναι καλά ωρισμένη για $m \to 0$. Ο,τι και να προσπαθήσει κανείς στα πλαίσια της Νευτώνειας μηχανικής για σωμάτια με μηδενική μάζα, δεν πρόκειται να καταλήξει σε εκφράσεις ενέργειας και ορμής συμβιβαστές με το πείραμα. Ο τύπος (5.22) δεν έχει ανάλογο στην μη σχετικιστική μηχανική.

Το Νευτώνιο όριο - Σχετικιστικές διορθώσεις

Για σώματα που κινούνται με μικρές ταχύτητες ο τύπος της ενέργειας του Νεύτωνα αποτελεί καλή προσέγγιση της κινητικής ενέργειας $K(v)$. Πράγματι, για $v/c \ll 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} K(v) &= mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \\ &\simeq mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+....-1\right) \\ &\simeq \frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}+... \end{aligned}$$

ήτοι, η κινητική ενέργεια δίνεται από τη Νευτώνεια έκφραση, συμπληρωμένη με την κύρια και τις ανώτερες σχετικιστικές διορθώσεις με τη μορφή δυναμοσειράς ως προς τη μικρή παράμετρο $v/c \ll 1$.

Μονάδες μάζας - ορμής. Πολύ συχνά και ιδιαίτερα στην Πυρηνική Φυσική και στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων οι μάζες μετρώνται σε μονάδες (Ενέργεια)/c^2. Ετσι γράφουμε

$$m_e \simeq 0.511MeV/c^2 \ , \ \ m_p \simeq 938.3MeV/c^2 \ , \ \ m_n \simeq 939.6MeV/c^2 \tag{5.25}$$

για τις μάζες του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου και του νετρονίου, αντίστοιχα.

Επίσης, η ορμή έχει διαστάσεις (Ενέργεια)/c και συνήθεις μονάδες της στη Πυρηνική Φυσική και τη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων είναι eV/c ή πολλαπλάσιά της όπως MeV/c.

Η μετατροπή των μονάδων γίνεται με βάση τις σχέσεις $1eV = 1.6\times10^{-12}\,erg = 1.6\times10^{-19}\,Joule$.

Επίσης $1MeV = 10^6\,eV, 1GeV = 10^9\,eV, 1TeV = 10^{12}\,eV$, κ.ο.κ.

Τέλος, η *ατομική μονάδα μάζης* $1u$ ορίζεται ως το 1/12 της μάζας του ατόμου του ${}^{12}_{6}C \simeq 1.66\times 10^{-27}kg \simeq 931.48MeV/c^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα $v = 0.85c$. Πόση είναι η ενέργεια και πόση η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου αυτού;

Απάντηση:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{0.511}{\sqrt{1-0.85^2}}MeV = 0.97MeV \ , \ \ K = E - mc^2 = 0.459MeV$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Πρωτόνιο έχει ενέργεια $E = 3m_pc^2$. (α) Η ενέργεια ηρεμίας του είναι $m_pc^2 = 938.3MeV$. (β) Η ταχύτητά του υπολογίζεται απο τη σχέση

$$\frac{m_pc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 3m_pc^2 \to 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \to v = \sqrt{8}c/3$$

(γ) Η κινητική του ενέργεια είναι $K = E - m_pc^2 = 2m_pc^2 = 1876.6MeV$. (δ) Τέλος η ορμή του είναι

$$p = \frac{m_pv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{v}{c}\frac{1}{c} = 3m_pc^2\frac{\sqrt{8}}{3}\frac{1}{c} = 2654MeV/c$$

Πριν προχωρήσουμε σε μερικές βασικές εφαρμογές των παραπάνω, θα ήθελα να κάνω δύο πολύ χρήσιμα σχόλια:

Ο μετασχηματισμός Lorentz της ενέργειας και της ορμής

Ας θεωρήσομε ένα σώμα μάζας m που κινείται ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς Σ με ταχύτητα **v**. Το σώμα αυτό έχει ενέργεια και ορμή που δίδονται απο τους τύπους (5.18) και (5.11) αντίστοιχα.

Φανταστείτε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Σ', κινούμενο ως προς το Σ, όπως δείχνει το Σχήμα 1. Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος ως προς τον Σ' δίδονται από τις σχέσεις (4.27), (4.28) και (4.29). Χρησιμοποιώντας αυτές, μπορείτε να υπολογίσετε τις συνιστώσες της ορμής (p'_x, p'_y, p'_z) καθώς και την ενέργεια E' του σώματος ως προς τον Σ', συναρτήσει τών αντιστοίχων (p_x, p_y, p_z) και ως προς τον Σ. Η απάντηση που θα καταλήξετε είναι

$$\boxed{\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \Lambda(V) \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}} \tag{5.26}$$

με $\Lambda(V)$ τόν ίδιο πίνακα (4.18) μετασχηματισμού των συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, οι τέσσερις ποσότητες $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ μετασχηματίζονται όταν αλλάζομε σύστημα αναφοράς, ακριβώς όπως οι χωροχρονικές συντεταγμένες (ct, x, y, z) των γεγονότων.

Γενίκευση: Η σχέση (5.26) ισχύει γενικά για την ολική ενέργεια και ορμή **P** οποιουδήποτε φυσικού συστήματος. Σκεφτείτε οτι σε κάθε τέτοιο σύστημα η και η **P** μπορούν να θεωρηθούν ως η ενέργεια και η ορμή **ενός** φανταστικού σώματος στο κέντρο μάζας του συστήματος. Γράφουμε λοιπόν γενικά

$$\boxed{\begin{pmatrix} E'/c \\ P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \Lambda(V) \begin{pmatrix} E/c \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}} \tag{5.27}$$

Αφού οι μετασχηματισμοί (4.15) και (5.27) είναι οι ίδιοι, τα βήματα που οδήγησαν στη σχέση (4.22) οδηγούν επίσης και στη σχέση

$$\boxed{E'^2 - c^2 P'^2_x - c^2 P'^2_y - c^2 P'^2_z = E^2 - c^2 P^2_x - c^2 P^2_y - c^2 P^2_z} \tag{5.28}$$

για την ενέργεια και τις συνιστώσες της ορμής ενός φυσικού συστήματος ως προς δύο οποιαδήποτε αδρανειακά συστήματα.

Ειδικά για ένα σωμάτιο μάζας m, η σχέση (5.21) μας διδάσκει ότι η τιμή της αναλλοίωτης αυτής ποσότητας είναι

$$E^2 - c^2 P^2_x - c^2 P^2_y - c^2 P^2_z = m^2 c^4\,. \tag{5.29}$$

Κατ' αναλογίαν, για ένα σύστημα σωμάτων η τιμή της ποσότητας $\sqrt{E^2 - c^2\mathbf{P}^2}/c^2$ ορίζει αυτό που ονομάζεται *αναλλοίωτη μάζα του συστήματος*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε, ακολουθώντας τα βήματα που περιγράψαμε στο κείμενο, τους συντελεστές α και β της (5.6).

2. Ο επιταχυντής Large Hadron Collider (LHC) του CERN επιταχύνει σήμερα πρωτόνια, σε τελική ενέργεια E=3.5 TeV. Να υπολογισθούν (α) η κινητική ενέργεια των πρωτονίων, (β) η ορμή τους και (γ) η ταχύτητά τους.

3. Πρωτόνιο των Κοσμικών Ακτίνων έχει ενέργεια E=10 GeV. Ζητούνται (α) η κινητική του ενέργεια K, (β) η ταχύτητά του με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου, (γ) η ορμή του. (δ) Τί ταχύτητα για το πρωτόνιο αυτό προβλέπει ο τύπος της κινητικής ενέργειας του Νεύτωνα;

4. Ραδιενεργός πυρήνας σε κάποιο εργαστήριο εκπέμπει φωτόνιο με ενέργεια E=10 MeV. Να υπολογίσετε (α) την ορμή του φωτονίου, (β) την συχνότητά του και (γ) την ταχύτητα του φωτονίου ως προς παρατηρητή κινούμενο με ταχύτητα V ως προς το εργαστήριο.

5. *Μέτρηση της μάζας του νετρίνου*. Από έκκρηξη supernova σε απόσταση L από τη Γη παράχθηκαν φωτόνια και νετρίνα με την ίδια ενέργεια E. Τα νετρίνα έφτασαν στη Γη χρόνο T μετά τα φωτόνια. Να υπολογιστεί η μάζα m του νετρίνου, συναρτήσει των L, E, T και της ταχύτητας του φωτός c. Εφαρμογή: $L = 2 \times 10^6 lyrs$, E=1MeV, T=1min.

6. Πυρηνικός αντιδραστήρας καταναλώνει 0.01 mole ραδιενεργού υλικού X, οι πυρήνες του οποίου διασπώνται σύμφωνα με την αντίδραση $X \rightarrow Y + A$, για να θερμάνει το νερό που περιέχει, μάζας $= 10^4 kg$. Δίδονται οι μάζες $m_X = 230.422 GeV/c^2$, $m_Y = 226.410 GeV/c^2$ και $m_A = 4.010 GeV/c^2$, αντίστοιχα, καθώς επίσης η ειδική θερμότητα $C = 4.19 kJ/kgr\ ^oC$ του νερού. (α) Να υπολογίσετε την μεταβολή της θερμοκρασίας του νερού του αντιδραστήρα. (β) Πόση ποσότητα πετρέλαιο εκτιμάτε ότι θα χρειαζόμασταν να κάψουμε για να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

7. Πόση είναι η κινητική ενέργεια ηλεκτρονίου με β=0.99; Πώς συγκρίνεται με την ενέργεια ηρεμίας του;

8. Πρωτόνιο έχει β=0.999 ως προς το εργαστήριο. Να βρείτε την ενέργεια και την ορμή του ως προς σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα 0.99 c ως προς το εργαστήριο και στην ίδια κατεύθυνση με το πρωτόνιο.

9. Φωτόνιο με ενέργεια E προσπίπτει στο εργαστήριο σε ακίνητο πυρήνα μάζας M.
(α) Πόση είναι η ορμή του φωτονίου, η ολική ορμή και η ολική ενέργεια του συστήματος στο εργαστήριο;
(β) Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του Κέντρου Μάζας του συστήματος φωτόνιο-πυρήνας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου είναι

$$\frac{V}{c} = \frac{E}{E + Mc^2} \tag{5.30}$$

10. Δύο πρωτόνια στον επιταχυντή του CERN κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσες ενέργειες E=4 TeV το καθένα.
(α) Πόση είναι η ορμή και η ταχύτητα του καθενός;
(β) Να υπολογίσετε την ενέργεια και την ορμή του ενός από αυτά στο σύστημα ηρεμίας του άλλου.

11. Να αποδείξετε τη σχέση (5.26).

12. Φωτόνιο κινείται στο επίπεδο x-y συστήματος Σ με ορμή, που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x. Να υπολογίσετε τη γωνία θ' που σχηματίζει η κατύθυνση κίνησης του φωτονίου με τον άξονα x' συστήματος Σ', που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα V στην κοινή κατεύθυνση x.

6 Βασικές εφαρμογές

Θα μελετήσουμε τώρα μια σειρά από φαινόμενα κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Lorentz και των αναλλοιώτων κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς, των σχετικιστικών εκφράσεων της ενέργειας και της ορμής συστήματος σωμάτων, και της εξίσωσης κίνησης της Σχετικιστικής Μηχανικής.

6.1 Νόμοι διατήρησης ενέργειας και ορμής

Θα αρχίσουμε με τρεις εφαρμογές των νόμων διατήρησης της ενέργειας και της ορμής. Τη μελέτη μιας τυπικής διάσπασης ασταθούς σωματιδίου, τον υπολογισμό της ενέργειας που εκλύεται σε μια τυπική πυρηνική σχάση και, τέλος, τη μελέτη της κινηματικής του φαινομένου Compton, δηλαδή της σκέδασης φωτονίου από ακίνητο σωμάτιο.

Διάσπαση σωματίου

Μια απλή εφαρμογή των νόμων διατήρησης ενέργειας και ορμής είναι σε αντιδράσεις διάσπασης σωματίων. Είναι οι αντιδράσεις που στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου ήταν αδύνατο να κατανοήσουμε με βάση την μηχανική του Νεύτωνα.

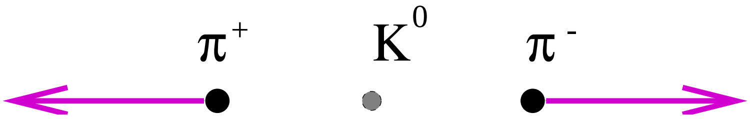
Ας πάρουμε για παράδειγμα τη διάσπαση

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \tag{6.1}$$

ενός ουδέτερου Καονίου σε δύο φορτισμένα π μεσόνια.

Δίδονται οι μάζες $M \equiv m_{K^0} = 498MeV/c^2$ και $m \equiv m_{\pi^\pm} = 138MeV/c^2$. Ζητούνται οι ταχύτητες των δύο πιονίων στο σύστημα ηρεμίας του διασπώμενου K^0.

Ο νόμος διατήρησης της ορμής σε συνδυασμό με το γεγονός ότι στην συγκεκριμένη αντίδραση οι μάζες των προϊόντων είναι ίσες, συνεπάγονται οτι τα δύο π μεσόνια θα εκπεμφθούν προς αντίθετες κατευθύνσεις και με την ίδια ταχύτητα.



Σχήμα 15: Η διάσπαση του K^0 στο σύστημα ηρεμίας του

Ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με απλή εφαρμογή του νόμου διατήρησης της ενέργειας. Πράγματι, πριν τη διάσπαση η ενέργεια του συστήματος ήταν η ενέργεια ηρεμίας Mc^2 του K^0, ενώ μετά τη διάσπαση έχομε δύο φορές την ενέργεια σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα v.

Γράφουμε λοιπόν

$$Mc^2 = 2\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.2}$$

απο την οποία προκύπτει ότι

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{4m^2}{M^2} \rightarrow v \simeq 0.832c \tag{6.3}$$

Πυρηνικές διασπάσεις

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να μελετήσει και διασπάσεις διαφόρων μετασταθών πυρήνων. Η ορθότητα των τύπων ενέργειας και ορμής επαληθεύεται σε όλες τις πυρηνικές αντιδράσεις.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την διάσπαση ενός ακίνητου πυρήνα ραδιενεργού ραδίου σε ραδόνιο και ήλιο.

$$^{226}_{88}Ra \rightarrow ^{222}_{86}Rn +^{4}_{2}He \tag{6.4}$$

Δίδονται οι μάζες των πυρήνων $m_{Ra} = 226.0254u$, $m_{Rn} = 222.0175u$ και $m_{He} = 4.0026u$.

Ερώτηση 1: Πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια των προιόντων της αντίδρασης.

Απάντηση: Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{initial} = m_{Ra}c^2 \tag{6.5}$$

και η τελική

$$E_{final} = E_{Rn} + E_{He} = m_{Rn}c^2 + K_{Rn} + m_{He}c^2 + K_{He} \tag{6.6}$$

όπου με K συμβολίζουμε την κινητική ενέργεια.

Η διατήρηση της ενέργειας $E_{initial} = E_{final}$ συνεπάγεται για την ζητούμενη συνολική κινητική ενέργεια

$$K = K_{Rn} + K_{He} = (m_{Ra} - m_{Rn} - m_{He})c^2 \tag{6.7}$$

Η ενέργεια ηρεμίας του αρχικού πυρήνα μετατρέπεται σε ενέργεια ηρεμίας των προιόντων και το πλεόνασμα, που δίδεται απο τη σχέση αυτή, διατίθεται σε κινητική ενέργεια των προϊόντων της αντίδρασης.

Αντικαθιστώ στη σχέση αυτή τις δεδομένες μάζες και βρίσκω

$$K = 0.0053u \times 931.5MeV/c^2uc^2 = 4.94MeV \tag{6.8}$$

Παρατηρείστε οτι η παραπάνω πυρηνική διάσπαση απελευθερώνει *εκατομμύρια φορές περισσότερη ενέργεια από ό,τι μια τυπική χημική αντίδραση!*.

Ερώτηση 2: Πόση ενέργεια εκλύεται συνολικά σε κινητική ενέργεια από τη διάσπαση ενός γραμμομορίου ραδιενεργού ραδίου;

Απάντηση: Είδαμε παραπάνω οτι από τη διάσπαση ενός πυρήνα ραδίου εκλύεται ενέργεια 4.94MeV. Επομένως, από ένα mole ραδίου θα εκλυθούν $K^{mole} = N_A \times 4.94MeV = 6.023 \times 4.94 \times 10^{23}MeV = 29.75 \times 10^{23}MeV = 29.75 \times 1.6 \times 10^{10}Joules = 4.76 \times 10^{11}Joules = 4.76/4.184 \times 10^{11}cal = 1.14 \times 10^{11}cal$.

Ερώτηση 3: Φανταστείτε οτι χρησιμοποιώ την ενέργεια που εκλύεται απο τη διάσπαση 1 mole Ra για να ζεστάνω νερό. Πόσης ποσότητας νερού μπορώ έτσι να αλλάξω την θερμοκρασία από 20^oC σε 90^oC;

Απάντηση: Για να αλλάξω την θερμοκρασία σώματος μάζας M κατά ΔΘ απαιτείται θερμότητα $Q = MC\Delta\Theta$, όπου C η ειδική θερμότητα του σώματος. Για το νερό έχομε $C = 1cal/grgrad$ [15] και διαθέτουμε ενέργεια K^{mole}. Η ποσότητα νερού που μπορούμε να θερμάνουμε είναι

$$M = \frac{K^{mole}}{C\Delta\Theta} = 1.6 \times 10^6 kg \tag{6.9}$$

Σκεφτείτε! Με λιγότερο από $250gr$ ράδιο μπορούμε να αυξήσουμε κατά 70^oC τη θερμοκρασία χιλίων τόνων νερού! Με την ίδια ποσότητα κάρβουνο ή TNT θα ζεσταίναμε ποσότητα μόλις μερικών κιλών. Γενικά, η ενέργεια που εκλύεται από πυρηνικές αντιδράσεις είναι της τάξης του ενός εκατομμυρίου φορές μεγαλύτερη από αυτήν που εκλύεται κατά την συνήθη καύση.

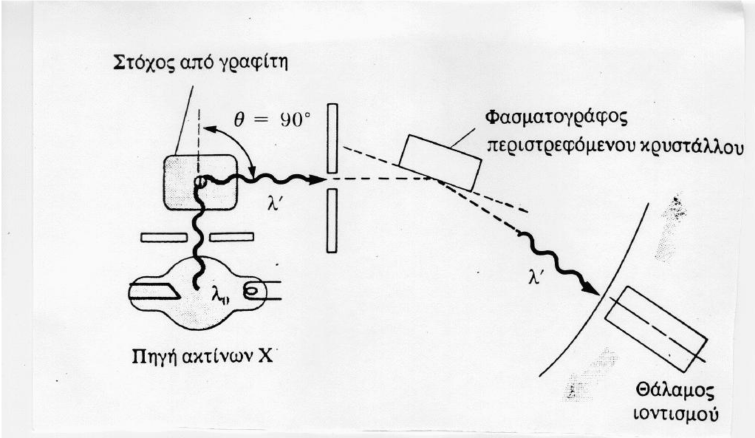
Σκέδαση φωτονίων - Φαινόμενο Compton

Ο Arthur Compton σε πειράματα που έκανε το 1924 στο Πανεπιστήμιο Washington του Saint Louis των ΗΠΑ παρατήρησε οτι το μήκος κύματος ακτίνων-χ αυξάνει μετά τη σκέδασή τους από την ύλη. Η αύξηση αυτή, απολύτως κατανοητή και αναμενόμενη σήμερα, είναι αδύνατο να ερμηνευθεί με βάση την κυματική θεωρία του φωτός, και απετέλεσε ένα ακόμη ισχυρό επιχείρημα υπέρ του σωματιδιακού χαρακτήρα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

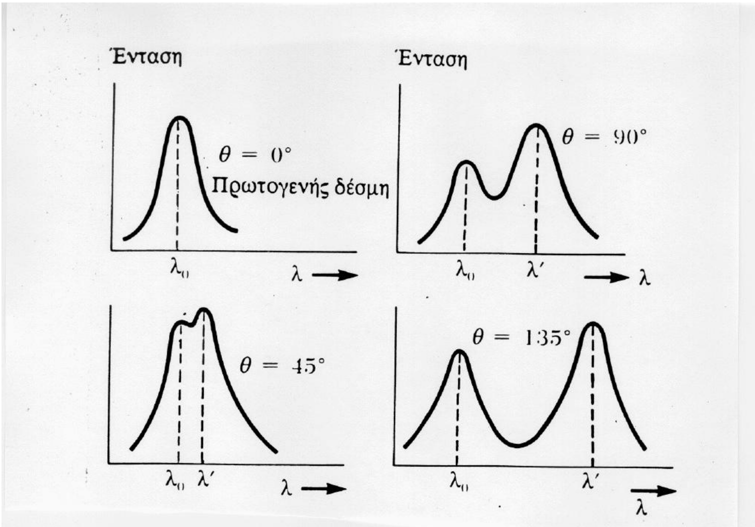
Το πείραμα: Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποίησε ο Compton φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 16. Μονοχρωματική δέσμη ακτίνων-χ, μήκους κύματος λ, πέφτει πάνω σε στόχο από γραφίτη και σκεδάζεται προς διάφορες κατευθύνσεις. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο φασματογράφο μετρούμε, για δεδομένη γωνία σκέδασης θ, την ένταση του σκεδαζόμενου φωτός ως συνάρτηση του μήκους κύματος λ'. Κάποια από τα αποτελέσματα του Compton παρουσιάζονται στα διαγράμματα του Σχήματος 17.

Δύο βασικά χαρακτηριστικά των παραπάνω γραφικών παραστάσεων που καλούμαστε να εξηγήσουμε είναι: (α) οτι για κάθε γωνία υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο της έντασης για λ' ίσο με το μήκος κύματος της αρχικής φωτεινής δέσμης, και (β) οτι για μη μηδενικές γωνίες σκέδασης εμφανίζεται

[15] Αγνοώ την μικρή εξάρτηση της ειδικής θερμότητας από την θερμοκρασία.



Σχήμα 16: Η πειραματική διάταξη του Compton



Σχήμα 17: Η ένταση του σκεδασμένου φωτός συναρτήσει του μήκους κύματος λ' για τις αναγραφόμενες τιμές της γωνίας σκέδασης. Η προσπίπτουσα δέσμη έχει μήκος κύματος λ

ένα ακόμα μέγιστο σε μήκος κύματος λ' μεγαλύτερο αυτού της αρχικής δέσμης. Πώς εξηγούνται όλα αυτά;

Ενα απλό μοντέλο: Για να κατανοήσουμε τα παραπάνω θα μελετήσουμε την σκέδαση ενός φωτονίου από ένα ακίνητο φορτίο. Το φως είναι μια δέσμη φωτονίων. Τα φωτόνια προσπίπτουν στα φορτία που βρίσκονται μέσα στο στόχο και σκεδάζονται. Οι σκεδαστές είναι ελεύθερα ηλεκτρόνια με μάζα m_e, ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια, που συμπεριφέρονται σαν βαριά σωμάτια με μάζα ουσιαστικά ίση με την μάζα ολόκληρου του ατόμου στο οποίο είναι δέσμια, και θετικά φορτισμένοι ατομικοί πυρήνες. Κανένα από αυτά φυσικά δεν είναι ακίνητο. Υπόκεινται τόσο σε κβαντομηχανικές όσο και σε θερμικές κινήσεις. Ωστόσο, οι χαρακτηριστικές ταχύτητες αυτών των κινήσεων είναι πολύ μικρότερες απο την ταχύτητα του φωτός και επομένως για απλότητα σε πρώτη προσέγγιση θα τις αγνοήσουμε.

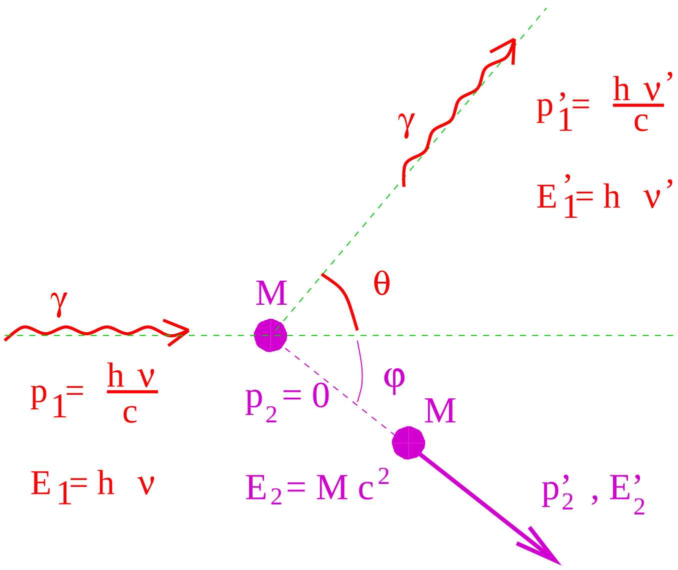
Εστω, λοιπόν, οτι φωτόνιο συχνότητας f συγκρούεται με *ακίνητο* φορτίο μάζας m και σκεδάζεται στην κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ ως προς την αρχική. Αντίστοιχα, το φορτίο μετά τη σύγκρουση κινείται στην κατεύθυνση ϕ, όπως δείχνει το Σχήμα 18.

Η ενέργεια του φωτονίου *πριν τη σκέδαση* είναι $E_1 = hf$ και η ορμή του $p_1 = hf/c$ στην κατεύθυνση x. Η ενέργεια και η ορμή του φορτίου πριν τη σκέδαση είναι $E_2 = mc^2$ και $p_2 = 0$, αντίστοιχα.

Αν με $E_1' = hf'$, $\mathbf{p}_1'$ και E_2', $\mathbf{p}_2'$ συμβολίσουμε την ενέργεια και την ορμή του φωτονίου και του φορτίου *μετά τη σκέδαση*, έχουμε τις σχέσεις:

$$E_1' = hf' \ , \ \ p_{1x}' = \frac{hf'}{c}\cos\theta \ , \ \ p_{1y}' = \frac{hf'}{c}\sin\theta$$

$$p_{2x}' = |\mathbf{p}_2'|\cos\phi \ , \ \ p_{2y}' = |\mathbf{p}_2'|\sin\phi \tag{6.10}$$



Σχήμα 18: Η κινηματική της σκέδασης Compton

Οι νόμοι διατήρησης ενέργειας και ορμής οδηγούν στις σχέσεις

$$hf + mc^2 = hf' + E_2' \tag{6.11}$$

$$\frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c}\cos\theta + |\mathbf{p}_2'|\cos\phi \tag{6.12}$$

$$0 = \frac{hf'}{c}\sin\theta - |\mathbf{p}_2'|\sin\phi\,. \tag{6.13}$$

Οι (6.12) και (6.13) γράφονται ισοδύναμα στη μορφή

$$c|\mathbf{p}_2'|\cos\phi = hf - hf'\cos\theta\ ,\quad c|\mathbf{p}_2'|\sin\phi = hf'\sin\theta \tag{6.14}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις εξισώσεις αυτές και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} c^2 p_2'^2 &= h^2(f^2 + f'^2 - 2ff'\cos\theta) \\ &= E_2'^2 - m^2c^4 \\ &= \Big(h(f-f') + mc^2\Big)^2 - m^2c^4 \\ &= h^2(f-f')^2 + 2mc^2 h(f-f') \end{aligned}$$

όπου για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση $c^2p_2'^2 = E_2'^2 - m^2c^4$, ενώ για την τρίτη χρησιμοποιήσαμε την σχέση (6.11).

Εξισώνοντας τις εκφράσεις της πρώτης και της τελευταίας γραμμής παίρνουμε τελικά

$$\frac{f - f'}{ff'} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\theta) \tag{6.15}$$

ή ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $f = c/\lambda$ και $f' = c/\lambda'$,

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)} \tag{6.16}$$

Για $\theta \neq 0$ το δεξιό μέλος είναι θετικό. Το μήκος κύματος λ' του φωτός μετά τη σκέδαση είναι μεγαλύτερο από το αρχικό λ. Η συχνότητά του αντίστοιχα μικραίνει. Το αποτέλεσμα αυτό αντιβαίνει στην κλασική κυματική θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που προβλέπει ότι λ'=λ [16], αλλά

[16] Σύμφωνα με την κυματική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, το προσπίπτον φώς σε κάθε σημείο στο χώρο, επομένως και στη θέση του ηλεκτρικού φορτίου, είναι ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο που ταλαντώνονται με τη δεδομένη συχνότητα f του φωτός σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Το ταλαντούμενο ηλεκτρικό πεδίο θέτει σε εξαναγκασμένη ταλάντωση το φορτίο με την ίδια συχνότητα f, και αυτό με τη σειρά του ακτινοβολεί επίσης με τη συχνότητα f. Επομένως, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία έχει μήκος κύματος ίσο με αυτό της προσπίπτουσας λ.

είναι προφανές και αναμενόμενο σύμφωνα με τον σωματιδιακό χαρακτήρα του φωτός. Το φωτόνιο κατά τη σύγκρουσή του με το ακίνητο σωματίδιο χάνει μέρος της ενέργειάς του, που μεταφέρεται ως κινητική ενέργεια στο σωματίδιο. Αρα, μετά τη σκέδαση έχει μικρότερη ενέργεια, δηλαδή μικρότερη συχνότητα και επομένως μεγαλύτερο μήκος κύματος.

Η ποσότητα $\lambda_C \equiv h/mc$ ονομάζεται *μήκος κύματος Compton του σωματίου μάζας m*. Για το ηλεκτρόνιο ισούται με $\lambda_C(e) = 2.426 \times 10^{-12} cm = 2.426 pm$. Για το πρωτόνιο είναι 1850 φορές μικρότερο.

Επιστροφή στο πείραμα: Είμαστε τώρα έτοιμοι να ερμηνεύσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των πειραματικών καμπυλών του Σχήματος 17.

(α) Τα ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια και οι ατομικοί πυρήνες σκεδάζουν το φως, αλλά οι μάζες τους είναι πολλές χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από αυτήν των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Συνεπώς, λόγω της μεγάλης μάζας στον παρονομαστή του τύπου του Compton, το δεξιό μέλος για κάθε γωνία είναι πολύ μικρό και σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να το αγνοήσουμε. Οπότε, για κάθε τιμή της γωνίας σκέδασης, θα υπάρχει ένα μέγιστο στην ένταση του σκεδαζόμενου φωτός με $\lambda' \simeq \lambda$, που οφείλεται ακριβώς στη σκέδαση του προσπίπτοντος φωτός απο τα φορτία αυτά.

(β) Το δεύτερο μέγιστο που εμφανίζεται στα διαγράμματα του Σχήματος 17 οφείλεται στη σκέδαση από τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του υλικού, και βρίσκεται ακριβώς στην θέση που προβλέπει ο τύπος του Compton.

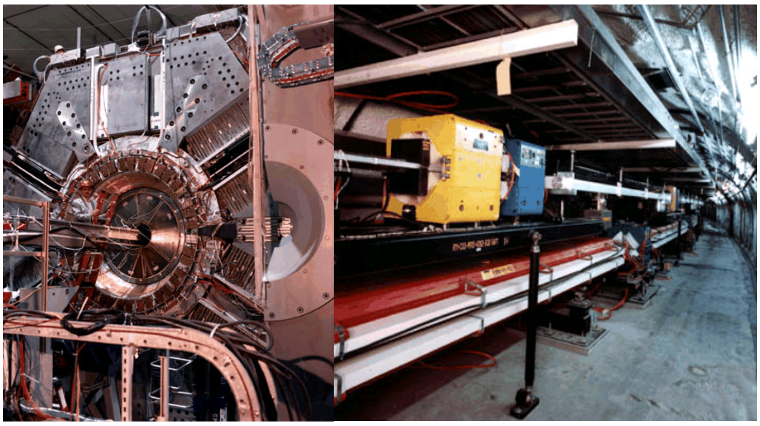
(γ) Το ότι τα παρατηρούμενα μέγιστα δεν είναι απειροστά λεπτά, όπως θα περίμενε κανείς μέ βάση την παραπάνω ανάλυση, οφείλεται αφ' ενός στο ότι οι σκεδαστές δεν είναι ακίνητοι, και αφ' ετέρου στο ότι η αρχική δέσμη δεν ήταν αυστηρά μονοχρωματική.

ΑΣΚΗΣΗ: Φωτόνιο ακτίνων-χ μήκους κύματος $10.0pm = 0.1$ Å σκεδάζεται από ακίνητο ηλεκτρόνιο. (α) Ποιό είναι το τελικό μήκος κύματος μετά απο σκέδαση σε γωνία 45^o; Απάντηση: $\lambda' = \lambda + \lambda_C(e)(1 - \sqrt{2}/2) = 10.0pm + 0.293 \times 2.426pm = 10.7pm$. (b) Σε ποιά γωνία σκέδασης θα έχει το σκεδαζόμενο φωτόνιο το μέγιστο μήκος κύματος; Απάντηση: Το φωτόνιο χάνει το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειάς του όταν σκεδαστεί προς τα πίσω, δηλαδή για $\theta = 180^o$. Οπότε $\lambda' = \lambda + 2\lambda_C(e) \simeq 14.9pm$.

6.2 Κίνηση σώματος υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης

Σώμα μάζας M βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζουμε πάνω του μια σταθερή δύναμη F στην κατεύθυνση του άξονα x. Να μελετηθεί η κίνησή του.

Το σκηνικό που περιγράφουμε εδώ είναι, για παράδειγμα, η περίπτωση της κίνησης φορτίου (ηλεκτρονίου, ποζιτρονίου, πρωτονίου) στο σταθερό ηλεκτρικό πεδίο ενός γραμμικού επιταχυντή.



Σχήμα 19: Ο γραμμικός επιταχυντής στο Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) των ΗΠΑ

Το υπό μελέτη σώμα ξεκινά από την ηρεμία υπό την επίδραση δύναμης στην κατεύθυνση x. Ολη η κίνηση επομένως εξελίσεται κατά μήκος του άξονα x. Οι y και z συνιστώσες της ταχύτητας παραμένουν μηδέν.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος ως προς το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = F \tag{6.17}$$

όπου v η x-συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος.

(α) *Η ταχύτητα* $v(t)$. Ολοκληρώνοντας ως προς χρόνο από 0 μέχρι t τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και παίρνουμε

$$\frac{Mv(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}} = Ft \tag{6.18}$$

ή ισοδύναμα, λύνοντας ως προς $v(t)$

$$v(t) = \frac{Ft/M}{\sqrt{1+F^2t^2/M^2c^2}}\,. \tag{6.19}$$

Για μικρούς χρόνους, δηλαδή για $Ft/Mc \ll 1$ μπορούμε να αναπτύξουμε την (6.19) κατά Taylor, οπότε παίρνουμε

$$v(t) \simeq \frac{F}{M}t + ... \tag{6.20}$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο. Για μικρούς χρόνους το σώμα δεν έχει ακόμα αναπτύξει μεγάλη ταχύτητα, και επομένως η ταχύτητά του θα πρέπει να ανάγεται στο Νευτώνειο αποτέλεσμα συν μικρές σχετικιστικές διορθώσεις, που και αυτές υπολογίζονται με την επιθυμητή ακρίβεια.

Αντίστοιχα, για μεγάλους χρόνους $Ft/Mc \gg 1$, η ταχύτητα πλησιάζει ασυμπτωτικά την ταχύτητα του φωτός

$$lim_{t\to\infty} v(t) = c\,, \tag{6.21}$$

επίσης αναμενόμενο για σώμα που βρίσκεται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης, και που από πρώτες αρχές δεν μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός.

(β) *Η θέση* $x(t)$ *του σώματος*. Η εξίσωση (6.19) γράφεται επίσης

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{Ft/M}{\sqrt{1+F^2t^2/M^2c^2}} \tag{6.22}$$

από την οποία με ολοκλήρωση και των δύο μελών ως προς χρόνο παίρνουμε [17]

$$x(t) = \frac{Mc^2}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{M^2c^2}} - 1\right) \tag{6.23}$$

Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα Taylor $\sqrt{1+w} \sim 1 + w/2 + ...$ για $|w| \ll 1$ για να βεβαιωθείτε οτι για μικρούς χρόνους $Ft/Mc \ll 1$ παίρνετε το Νευτώνειο αποτέλεσμα

$$x(t) \simeq \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2 + ... \tag{6.24}$$

Επίσης, εύκολα μπορείτε να επαληθεύσετε οτι για μεγάλους χρόνους η σχέση (6.23) γίνεται

$$x(t) \simeq ct\,, \tag{6.25}$$

όπως ακριβώς αναμενόταν με βάση προηγούμενο σχόλιο για την οριακή ταχύτητα του σώματος.

(γ) *Η επιτάχυνση* $a(t)$ *του σώματος* υπολογίζεται με μιά απλή παραγώγιση της (6.19) ως προς τον χρόνο. Το αποτέλεσμα είναι:

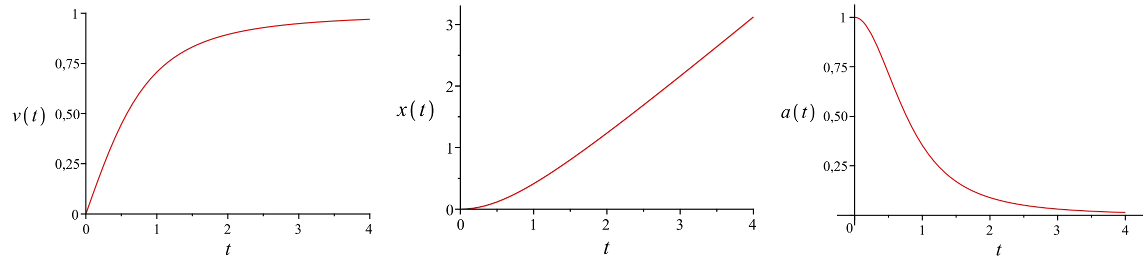
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{F/M}{(1+F^2t^2/M^2c^2)^{3/2}}\,. \tag{6.26}$$

Η επιτάχυνση ξεκινάει από την τιμή F/M για $t = 0$ και τείνει στο μηδέν ως $\sim t^{-3}$ για μεγάλους χρόνους. Αρα, σταθερή δύναμη στο εργαστήριο δεν συνεπάγεται σταθερή επιτάχυνση. Κάτι τέτοιο θα είχε σαν αποτέλεσμα αργά ή γρήγορα το σώμα να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός.

Στο Σχήμα 20 μπορείτε να δείτε τα γραφήματα των $v(t), x(t)$ και $a(t)$ για $F/M = 1$ και $c = 1$.

(δ) *Η επιτάχυνση στο σύστημα ηρεμίας του σώματος*. Τί επιτάχυνση αισθάνεται το ίδιο το σώμα; Ενας παρατηρητής στο σύστημα ηρεμίας του σώματος αντιλαμβάνεται μονίμως ένα ακίνητο σώμα

[17] Παρατηρείστε οτι $(F/M)tdt = (Mc^2/2F)d(1 + F^2t^2/M^2c^2)$.

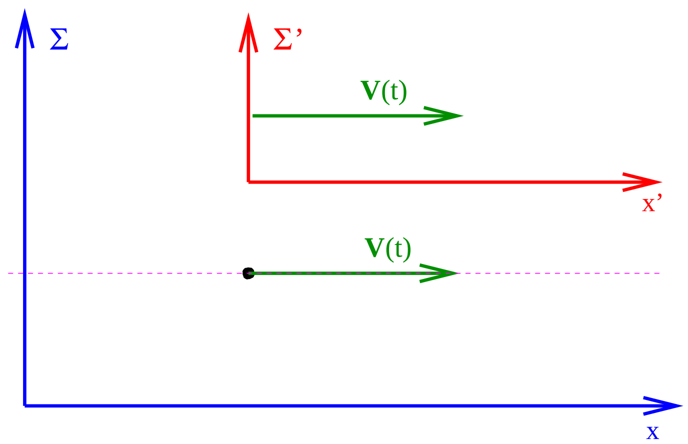


(α′) Ταχύτητα (β′) Θέση (γ′) Επιτάχυνση

Σχήμα 20: Η ταχύτητα, η θέση και η επιτάχυνση του σώματος για $F/M = 1$ και $c = 1$. Το σώμα ξεκίνησε από την ηρεμία στη θέση $x = 0$

υπο την επίδραση μιας σταθερής δύναμης. Αρα ως προς αυτόν το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση $a_0 = F/M$.

Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγει κανείς και ως εξής: Το σύστημα ηρεμίας του σώματος δεν είναι αδρανειακό. Αυτό είναι φανερό, αφού το σώμα επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου μας. Την χρονική στιγμή t η ταχύτητα του σώματος δίδεται απο τη σχέση (6.19). Επομένως, ένα σύστημα που κινείται κατά το απειροστό χρονικό διάστημα $(t, t+dt)$ με τη σταθερή ταχύτητα $v(t)$ είναι αδρανειακό και για το απειροστά μικρό αυτό χρονικό διάστημα dt συμπίπτει με το σύστημα ηρεμίας του σώματος. Είναι αυτό που ονομάζομε *στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας του σώματος*.



Σχήμα 21: Το σύστημα Σ’ είναι το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας του σώματος. Το Σ είναι το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου. Η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων είναι η στιγμιαία ταχύτητα $v(t)$ του σώματος

Η επιτάχυνση επομένως του σώματος ως προς τον εαυτό του υπολογίζεται από τον τύπο (4.32), βάζοντας την σχετική ταχύτητα $V = v_x(t)$, ίση δηλαδή προς την στιγμιαία ταχύτητα του σώματος. Το αποτέλεσμα είναι

$$a'_x = a_x \left(1 - \frac{v_x^2(t)}{c^2}\right)^{-3/2} \tag{6.27}$$

Χρησιμοποιώντας τέλος την έκφραση (6.19) για την $v_x(t)$ καταλήγουμε στην $a'_x = F/M$.

(ε) *Ο χρόνος ως προς το επιταχυνόμενο σώμα*. Ενα ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: Πόσος χρόνος t' έχει περάσει σύμφωνα με το ρολόι του επιταχυνόμενου σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t του ρολογιού στο εργαστήριο;

Πάρτε πάλι το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας Σ’ του σωματιδίου το χρονικό διάστημα $(t, t + dt)$ ως προς το εργαστήριο. Στο χρονικό διάστημα dt του Σ αντιστοιχεί το dt' κατά τον Σ’, που δίδεται από τον τύπο της διαστολής του χρόνου

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}} \tag{6.28}$$

Αντικαθιστώντας την $v(t)$ από την (6.19) και ολοκληρώνοντας στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα $(0,t)$ και $(0,t')$ παίρνουμε

$$\int_0^{t'} dt' = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+F^2t^2/M^2c^2}}\,, \tag{6.29}$$

με τελικό αποτέλεσμα τη σχέση

$$t' = \frac{Mc}{F} sh^{-1}(Ft/Mc) \tag{6.30}$$

(στ) *Εφαρμογή:* Κοσμοναύτης ξεκινά με το διαστημόπλοιό του και με σταθερή επιτάχυνση $a_0 = 1g \simeq 10m/sec^2$ (όπως την αντιλαμβάνεται ο ίδιος) κατευθύνεται προς την Ανδρομέδα, που απέχει από τη Γη 2.000.000 έτη φωτός. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φθάσει στον προορισμό του;

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη τιμή του x=2.000.000 έτη φωτός στην (6.23) υπολογίζουμε το αντίστοιχο t, από το οποίο με αντικατάσταση στην (6.30) παίρνουμε τον ζητούμενο χρόνο t'.

Γενικά, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση $x(t')$, που δίνει την απόσταση που διανύει κατά τον Σ ο κοσμοναύτης, ως συνάρτηση του χρόνου t' που μετράει ο Σ'. Πράγματι, αντιστρέφοντας την (6.30) παίρνουμε

$$\frac{a_0 t}{c} = sh(a_0 t'/c)\,, \tag{6.31}$$

την οποία αντικαθιστώντας στην (6.23) βρίσκουμε

$$x(t') = \frac{c^2}{a_0}\Big(ch(a_0 t'/c) - 1\Big) \tag{6.32}$$

Εφαρμογή: Για $a_0 = 10m/sec^2$ και $x = 2.000.000$ έτη φωτός ο ζητούμενος χρόνος είναι $t' = (c/a_0)ch^{-1}(1+a_0x/c^2) \simeq \ln(1.8\times 10^6) years \simeq 15.2 years$. 'Εχοντας, λοιπόν, σταθερή επιτάχυνση ίση προς την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης μπορείτε να φτάσετε στην Ανδρομέδα, που απέχει από τη γη 2.000.000 έτη φωτός, σε μόλις 15 χρόνια!!

6.3 Το φαινόμενο Doppler

Ολοι έχουμε εμπειρία του φαινομένου Doppler. Ολοι έχουμε βρεθεί σε κάποιον αυτοκινητόδρομο και έχουμε παρατηρήσει ότι ο ήχος της μηχανής ενός αυτοκινήτου είναι οξύτερος, έχει υψηλότερη συχνότητα, όσο αυτό μας πλησιάζει και γίνεται πιό βαθύς όταν μας προσπερνάει και απομακρύνεται.

Το ίδιο φαινόμενο ισχύει και για το φώς. Οπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η συχνότητα του φωτός που φτάνει σε παρατηρητή εξαρτάται από τη σχετική κίνηση της πηγής ως προς αυτόν. Μεγαλώνει όταν η πηγή πλησιάζει και μικραίνει όταν αυτή απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Ας θεωρήσουμε ότι φωτεινή πηγή, ακίνητη στο σύστημα αναφοράς Σ, εκπέμπει ακτινοβολία μήκους κύματος λ ως προς το σύστημα αυτό. Θα αποδείξουμε ότι παρατηρητής Σ', που *απομακρύνεται από την πηγή* με ταχύτητα V, μετράει για την εν λόγω ακτινοβολία μήκος κύματος

$$\boxed{\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}} \tag{6.33}$$

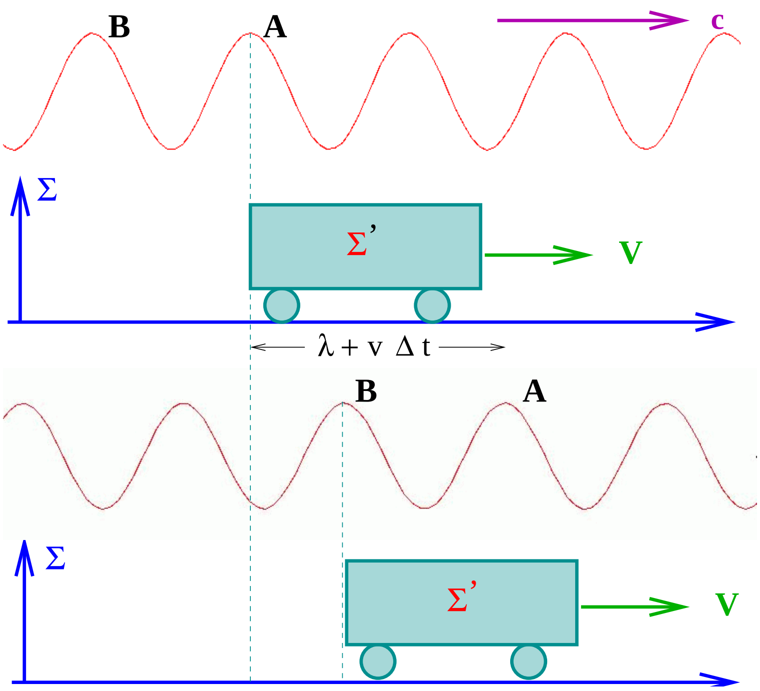
Ο απομακρυνόμενος από την πηγή παρατηρητής μετράει μεγαλύτερο μήκος κύματος από αυτό που μετράει παρατηρητής στο σύστημα ηρεμίας της πηγής.

Αντίστοιχα, αν ο Σ' *πλησιάζει την πηγή* με ταχύτητα V, θα μετράει μικρότερο μήκος κύματος, που δίδεται από τη σχέση

$$\boxed{\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}} \tag{6.34}$$

Απόδειξη με βάση την κυματική φύση του φωτός.

Θα αποδείξουμε την σχέση (6.33). Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε τους δύο παρατηρητές Σ και Σ' του Σχήματος 22. Η περίοδος κύματος ως προς κάποιον παρατηρητή είναι ο χρόνος που περνάει κατά τον παρατηρητή αυτόν ανάμεσα στις αφίξεις δύο διαδοχικών μεγίστων του κύματος. Αν λοιπόν



Σχήμα 22: Το σύστημα της πηγής Σ και ο απομακρυνόμενος παρατηρητής Σ'

t'_A και t'_B είναι οι χρονικές στιγμές στο σύστημα Σ' κατά τις οποίες φτάνουν στην αρχή των αξόνων του Σ' τα μέγιστα A και B του κύματος, τότε η περίοδός του T' κατά τον Σ' είναι

$$T' \equiv \frac{1}{f'} = \Delta t' = t'_B - t'_A \tag{6.35}$$

Τα γεγονότα: "άφιξη του μεγίστου A στην αρχή των αξόνων του Σ'" και "άφιξη του μεγίστου B στην αρχή των αξόνων του Σ'" λαμβάνουν εξ' ορισμού χώρα *στην ίδια θέση στο σύστημα Σ'*. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο της διαστολής του χρόνου, άν $\Delta t = t_B - t_A$ είναι η χρονική απόσταση κατά τον Σ των δύο αυτών γεγονότων, ισχύει

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{6.36}$$

Τα γεγονότα A και B είναι αυτά που δείχνει το Σχήμα 22. Σύμφωνα με τον Σ, στο χρονικό διάστημα που πέρασε ανάμεσα στα δύο γεγονότα, το μέγιστο A του κύματος διήνυσε απόσταση $\Delta l = \lambda + V\Delta t$. Αρα,

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c} = \frac{\lambda + V\Delta t}{c} = \frac{1}{f} + \frac{V}{c}\Delta t \tag{6.37}$$

ή λύνοντας ως προς Δt

$$\Delta t = \frac{1}{f\Big(1 - V/c\Big)} \tag{6.38}$$

Αντικαθιστώντας τις (6.35) και (6.38) στην (6.36) παίρνουμε

$$f\left(1 - \frac{V}{c}\right) = f'\sqrt{\frac{1 - V^2}{c^2}} \quad \rightarrow \quad f = f'\sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \tag{6.39}$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \tag{6.40}$$

όπερ έδει δείξαι.

Απόδειξη στη γλώσσα των φωτονίων.

'Εστω $E = hf$ και $p = hf/c$ η ενέργεια και η ορμή φωτονίου που εκπέμπει η πηγή στη θετική κατεύθυνση x στο σύστημα Σ της πηγής. Ο παρατηρητής Σ' θα μετρήσει για το ίδιο φωτόνιο ενέργεια $E' = hf'$. 'Ομως, ο Σ' κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα V ως προς το Σ. 'Αρα, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz, θα μετράει για την ενέργεια του ίδιου φωτονίου

$$E' = hf' = \frac{E - Vp}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = hf\frac{1 - V/c}{\sqrt{(1 - V/c)(1 + V/c)}} = hf\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}, \qquad (6.41)$$

από όπου καταλήγουμε στους τύπους (6.39) και (6.40).

Σχόλιο 1: Ισοδύναμα, οι τύποι (6.33) και (6.34) δίνουν το μήκος κύματος λ' που μετράει παρατηρητής ως προς τον οποίο η πηγή απομακρύνεται ή αντίστοιχα πλησιάζει με ταχύτητα V.

Το φως που παρατηρούμε από απομακρυνόμενη πηγή παρουσιάζει μετατόπιση προς μεγαλύτερα μήκη κύματος. Το φαινόμενο καλείται *μετατόπιση προς το ερυθρό ή ερυθρόπηση* (red shift). Αντίστοιχα, σε φωτεινές πηγές που πλησιάζουν παρατηρούμε μετατόπιση προς μικρότερα μήκη κύματος, *μετατόπιση προς το μπλε ή κυανόπηση* (blue shift).

Το φαινόμενο Doppler έχει πολλές και ποικίλες πρακτικές εφαρμογές. Από την μετατόπιση των φασματικών γραμμών, που παρατηρούμε στη φασματική ανάλυση του φωτός μιάς πηγής, όπως για παράδειγμα ενός γαλαξία, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητά της ως προς εμάς. Με αντίστοιχες τεχνικές βασισμένες στο φαινόμενο Doppler μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ροής κάποιου υγρού (όπως για παράδειγμα του αίματος στις αρτηρίες).

Σχόλιο 2: Στα παραπάνω η συζήτηση περιορίστηκε σε φωτεινές πηγές. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, το φαινόμενο Doppler ισχύει γενικώτερα για οποιοδήποτε κύμα. Μπορείτε να επαναλάβετε την απόδειξη για την περίπτωση ενός ακουστικού κύματος;

Σχόλιο 3: Το μή σχετικιστικό όριο του τύπου Doppler. Οταν η πηγή κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός, τότε οι τύποι (6.33) και (6.34) παίρνουν την πιό γνωστή σας (προσεγγιστική) μορφή

$$\lambda' \simeq \lambda\Big(1 \pm \frac{V}{c}\Big), \qquad (6.42)$$

αντίστοιχα. *Αποδείξτε το.*

6.4 Σχετικιστικά αναλλοίωτα.

(α) Η ένδειξη ρολογιού σε τυχούσα κίνηση - Ο ιδιοχρόνος παρατηρητή.

Εδώ θα ασχοληθούμε με το εξής ερώτημα: Ταξιδιώτης κινείται πάνω σε τυχούσα κοσμική τροχιά ανάμεσα στα γεγονότα Α και Β του χωρόχρονου (Σχήμα 23). Αν $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ είναι η σχέση που περιγράφει τη τροχιά του ταξιδιώτη στο αδρανειακό σύστημα Σ του Σχήματος και t_1 και t_2 οι χρονικές συντεταγμένες των Α και Β, αντίστοιχα, στο Σ, πόσο χρόνο δείχνει το ρολόϊ του ταξιδιώτη για το ταξίδι του από το Α στο Β;

Κατά το στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt ο ταξιδιώτης κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, που στο μικρό αυτό χρονικό διάστημα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, οπότε ο ταξιδιώτης ορίζει αυτό που ονομάσαμε *στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα ηρεμίας του*, που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα $\mathbf{v}(t)$. Επομένως, το χρονικό διάστημα $d\tau$ του ρολογιού του ταξιδιώτη, που αντιστοιχεί στο διάστημα dt του Σ, ικανοποιεί τη σχέση

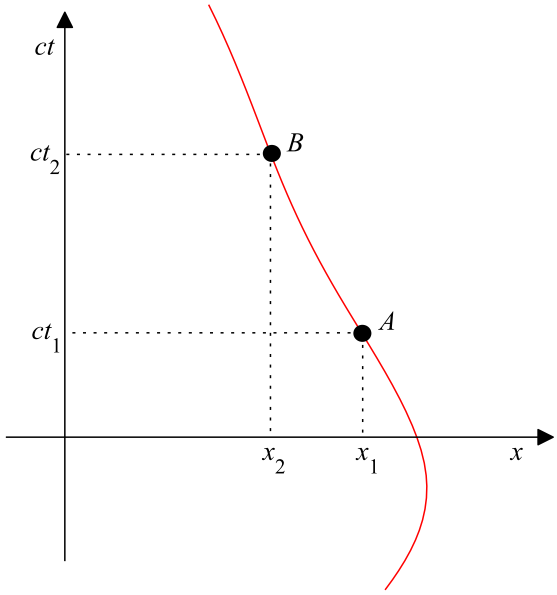
$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}}, \qquad (6.43)$$

ή ισοδύναμα

$$d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}\; dt\,. \qquad (6.44)$$

Επομένως, η ένδειξη του ρολογιού του ταξιδιώτη για την όλη διαδρομή από το Α στο Β θα είναι

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}} = \int_1^2 \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2} = \int_1^2 ds/c\,, \qquad (6.45)$$



Σχήμα 23: Ταξιδιώτης σε τυχούσα τροχιά

όπου $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ η στοιχειώδης χωροχρονική απόσταση δύο γειτονικών σημείων της τροχιάς του ταξιδιώτη, των οποίων οι χωροχρονικές συντεταγμένες διαφέρουν κατά (dt, dx, dy, dz).

Επομένως, ρολόϊ που κινείται σε τυχούσα τροχιά $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ στο χώρο ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 του ρολογιού του Σ θα δείξει οτι πέρασε χρόνος που δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = \int_1^2 ds/c\,, \tag{6.46}$$

με $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Τα παραπάνω δείχνουν ότι η φυσική σημασία του αναλλοιώτου μήκους τροχιάς στο χωρόχρονο είναι $s = c\tau$, δηλαδή το γινόμενο της ταχύτητας του φωτός επί το χρόνο τ, που δείχνει ρολόϊ που ακολουθεί τη δοσμένη τροχιά. Ο χρόνος τ ονομάζεται **ιδιοχρόνος** του ρολογιού/παρατηρητή. Το γεγονός ότι το ds είναι **αναλλοίωτο** ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, σημαίνει ότι όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές υπολογίζουν, όπως είναι αυτονόητο ότι θα έπρεπε, την ίδια τιμή για τον ιδιοχρόνο παρατηρητή ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία A και B της κοσμικής τροχιάς του.

(β) Κατώφλι ενέργειας σωματίου για πραγματοποίηση αντίδρασης στο σύστημα του εργαστηρίου

Σωμάτιο A (βλήμα) με ενέργεια E_A προσπίπτει σε ακίνητο σωμάτιο B (στόχος). Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της E_A ώστε να μπορεί να γίνει η αντίδραση

$$A + B \to C_1 + C_2 + ... + C_n \tag{6.47}$$

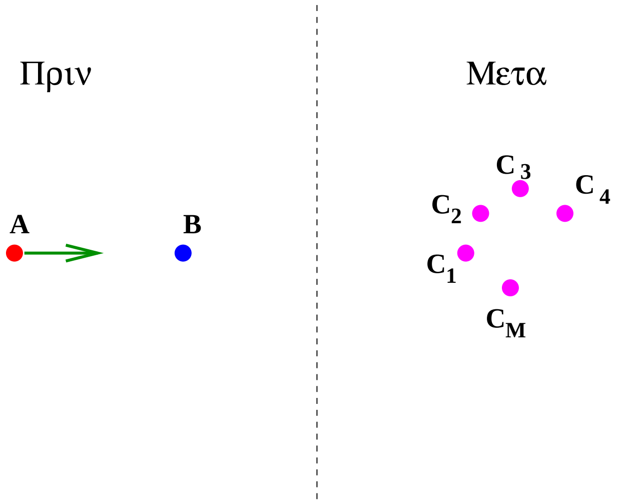
όπου τα σωμάτια C_i έχουν μάζες m_i, $i = 1, 2, ...n$. Το ερώτημα είναι μη τετριμμένο μόνο όταν το άθροισμα των μαζών των προιόντων είναι μεγαλύτερο από αυτό των αντιδρώντων, δηλαδή όταν $m_A + m_B < m_1 + m_2 + ... + m_n$. Στην αντίθετη περίπτωση η ενέργεια ηρεμίας των αντιδρώντων είναι ήδη αρκετή για να μπορεί ενεργειακά να οδηγήσει στα προϊόντα του δεύτερου μέλους.

Η συνθήκη για το ελάχιστο της απαιτούμενης ενέργειας διατυπώνεται πολύ απλά στο σύστημα κέντρου μάζας (CM) των αντιδρώντων, ως η τιμή εκείνη της ενέργειας για την οποία τα προιόντα θα παραχθούν όλα ακίνητα [18]. Τότε η τελική ενέργεια του συστήματος είναι $E^{CM}_{min} = E^{CM}_{total} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)\, c^2$.

Στο σύστημα του εργαστηρίου *πριν* την αντίδραση έχουμε την εικόνα στο αριστερό μισό του Σχήματος 24. Η ολική ενέργεια και ορμή του συστήματος είναι:

$$E^{lab}_{initial} = E_A + m_Bc^2\ , \quad P^{lab}_{initial} = P_A = \frac{1}{c}\sqrt{E_A^2 - m_A^2c^4}\,, \tag{6.48}$$

[18] Η συνθήκη αυτή δεν μπορεί να ικανοποιηθεί στο σύστημα του εργαστηρίου, διότι είναι σε αντίθεση με τη διατήρηση της ορμής.



Σχήμα 24: Η εικόνα του συστήματος πριν την αντίδραση στο σύστημα του εργαστηρίου, και μετά την αντίδραση στο σύστημα κέντρου μάζης

ενώ, αντίστοιχα, *μετά* την αντίδραση στο σύστημα Κέντρου Μάζης έχουμε

$$E^{CM}_{final} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)\, c^2 \ , \quad P^{CM}_{final} = 0 \, . \tag{6.49}$$

Χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής, και το γεγονός ότι η ποσότητα $E^2 - c^2P^2$ για οποιοδήποτε φυσικό σύστημα έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα (εδώ το σύστημα του εργαστηρίου και το σύστημα Κέντρου Μάζας), γράφουμε διαδοχικά:

$$(E^{lab}_{initial})^2 - c^2(P^{lab}_{initial})^2 = (E^{lab}_{final})^2 - c^2(P^{lab}_{final})^2 = (E^{CM}_{final})^2 - c^2(P^{CM}_{final})^2 \, . \tag{6.50}$$

Αντικαθιστώντας σε αυτήν τις (6.48) και (6.49) παίρνουμε

$$(E_A + m_B c^2)^2 - (E^2_A - m^2_A c^4) = (m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 c^4 \, . \tag{6.51}$$

Λύνοντας, τέλος, ως προς E_A βρίσκουμε τη ζητούμενη ελάχιστη ενέργεια

$$E_A = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 - m^2_A - m^2_B}{2m_B}\, c^2 \, . \tag{6.52}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Πυρήνας μάζας 2×10^{-23} gr αποδιεγείρεται εκπέμποντας φωτόνιο με ενέργεια 2MeV. Να βρείτε την ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα σε ergs και σε eV. Το ίδιο και για την ορμή του πυρήνα σε gr m/sec και eV/c.

2. (α) Χρησιμοποιώντας τους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής, να αποδείξετε ότι ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα **v** στο κενό δεν μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο.
(β) Σε αντίθεση με το (α) γνωρίζετε ότι ένα διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο. Πού οφείλεται αυτή η διαφορά;

3. Θεωρείστε την αντίδραση $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, όπου ένα φωτόνιο με ενέργεια προσπίπτει σε ακίνητο πρωτόνιο (μάζας) και παράγει ένα πιόνιο (μάζας m) στη τελική κατάσταση. Η αντίδραση αυτή λέγεται "pion photo-production".
(α) Να αποδείξετε ότι η ενέργεια κατωφλίου του φωτονίου είναι

$$E = m\left(1 + \frac{m}{2M}\right) c^2 \, . \tag{6.53}$$

(β) Η ενέργεια του φωτονίου δεν μετατρέπεται όλη σε ενέργεια ηρεμίας του πιονίου. Τί ποσοστό είναι αυτό και πού πηγαίνει;

4. Να υπολογίστε με βάση τη Νευτώνεια Μηχανική, τον απαιτούμενο χρόνο για ένα ταξίδι στην Ανδρομέδα, που απέχει από τη Γη 2.000.000 έτη φωτός με σταθερή επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης ($g \simeq 10\, m/sec^2$).

5. *Το γενικό φαινόμενο Doppler.* Φωτεινή πηγή κινούμενη με ταχύτητα V ως προς παρατηρητή Σ εκπέμπει φωτόνιο συχνότητας f και σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία α με την ταχύτητα της πηγής στο σύστημα ηρεμίας της. (α) Τί συχνότητα θα μετρήσει ο Σ για το φωτόνιο αυτό; (β) Τί γωνία θα μετρήσει ο Σ να σχηματίζουν η σχετική ταχύτητά του με τη πηγή και η κατεύθυνση εκπομπής του φωτονίου;

(Υπόδειξη: Θεωρείστε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η σχετική ταχύτητα V είναι κατά τον κοινό άξονα x του Σ και της πηγής. Στη συνέχεια (i) Γράψετε τις συνιστώσες της τετραορμής του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας της πηγής. (ii) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Lorentz για την τετραορμή, υπολογίσετε τις συνιστώσες της στο σύστημα Σ. (iii) Η συχνότητα που βλέπει ο Σ υπολογίζεται από την ενέργεια του φωτονίου ως προς αυτόν. (iv) Η κατεύθυνση του φωτονίου ως προς τον Σ υπολογίζεται από το πηλίκον των συνιστωσών x και y της ορμής που παρατηρεί αυτός.)

6. Πρωτόνιο με μάζα και ενέργεια προσπίπτει σε άλλο ακίνητο και σκεδάζεται σε κατεύθυνση κάθετη προς την αρχική. (α) Να υπολογιστούν η ενέργεια και η ορμή του πρωτονίου στόχου μετά τη κρούση. (β) Να υπολογιστεί η ενέργεια των πρωτονίων μετά τη κρούση στο σύστημα κέντρου μάζας του συστήματος.

7. Να υπολογιστεί η μέγιστη ορμή, που μπορεί να μεταφερθεί σε ακίνητο ηλεκτρόνιο μάζας m από τη πρόσπτωση φωτονίου ενέργειας .

8. Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την ταχύτητα $v(t)$, τη θέση $x(t)$ και την επιτάχυνση $a(t)$ του σώματος της παραγράφου 6.2 με βάση τη Νευτώνεια Μηχανική και να συγκρίνετε με τα διαγράμματα του Σχήματος 20.

7 Διαγράμματα Minkowski

Η φυσική ασχολείται με την παρατήρηση, καταγραφή και μελέτη των συσχετίσεων ανάμεσα σε *γεγονότα*. Ενα γεγονός χαρακτηρίζεται από την θέση στην οποία έλαβε χώρα και από τη χρονική στιγμή στην οποία συνέβη. Επομένως, αν σχεδιάσουμε ένα τετραδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, με τρείς χωρικούς και έναν χρονικό άξονα, τότε κάθε γεγονός αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο σύστημα αυτό.

Ονομάζομε *χωροχρόνο* το σύνολο των γεγονότων στο Σύμπαν. Σε κάθε σύστημα αναφοράς αντιστοιχεί ένα σύστημα χωροχρονικών αξόνων. Διαφορετικοί παρατηρητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς άξονες. 'Ενα και το αυτό γεγονός περιγράφεται με διαφορετικές χωροχρονικές συντεταγμένες από διαφορετικούς παρατηρητές.

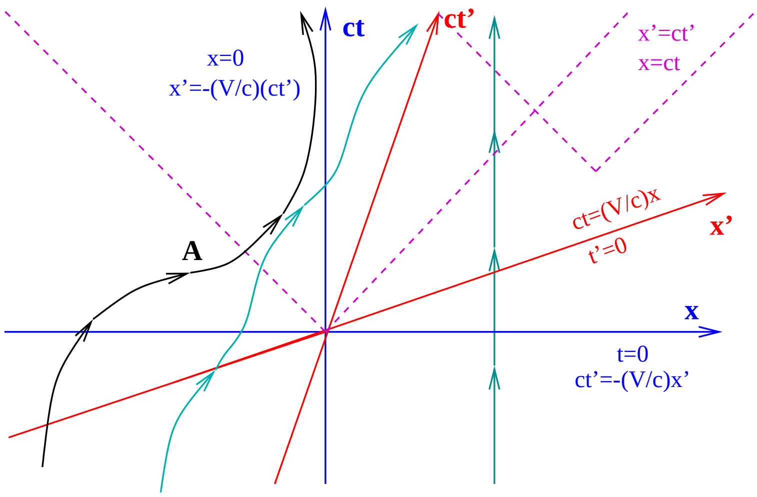
7.1 Κοσμικές γραμμές σωματιδίων - Κώνοι φωτός

Στο σχήμα που ακολουθεί μπορείτε εύκολα να αναγνωρίσετε

(α) Τους άξονες (ct, x) του συστήματος συντεταγμένων κάποιου παρατηρητή Σ. 'Οπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι πιό βολικό να μετράμε και τη χρονική συντεταγμένη με μονάδες μήκους όπως και τις συντεταγμένες θέσης. Για τον λόγο αυτό σημειώνουμε την ποσότητα ct αντί για το χρόνο t στον κατακόρυφο άξονα. Οι άξονες y και z δεν εμφανίζονται στο Σχήμα 25. Οι κινήσεις και οι τροχιές που αναπαριστώνται είναι περιορισμένες κατά μήκος του άξονα των x.

(b) Την *κοσμική τροχιά* ενός σώματος ακίνητου στη θέση $x = 0$ του συστήματος αυτού. Πρόκειται για τον άξονα των χρόνων του συστήματος συντεταγμένων του Σχήματος.

(c) Την κοσμική τροχιά ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον παρατηρητή Σ.



Σχήμα 25: Γεγονότα, κοσμικές γραμμές, κοσμικές τροχιές σωμάτων, κώνοι φωτός

(d) Τις τροχιές του μετώπου του φωτεινού κύματος που εξέπεμψε τη χρονική στιγμή $t = 0$ φωτεινή πηγή ευρισκόμενη στη θέση $x = 0$. Το κύμα εκπέμπεται με ταχύτητα c τόσο προς την θετική όσο και προς την αρνητική κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα των x. Ικανοποιεί τις σχέσεις $x = \pm ct$ και οι αντίστοιχες ευθείες είναι διχοτόμοι του πρώτου και δεύτερου τεταρτημορίου του Σχήματος.

(e) Το αυτό για φωτεινό κύμα που εξέπεμψε πηγή από τη θέση $x_1 \neq 0$ τη χρονική στιγμή $t_1 \neq 0$.

(e) Την κοσμική γραμμή που περιγράφει κάποια πολύπλοκη κίνηση ενός σώματος.

(f) Μια κοσμική γραμμή που δεν είναι πραγματοποιήσιμη από κανένα σώμα. Για να είναι μια γραμμή στον χωρόχρονο επιτρεπτή κοσμική τροχιά ενός σώματος, πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη οτι η ταχύτητα του σώματος σε κάθε σημείο της να είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός. Με άλλα λόγια, η εφαπτομένη στην τροχιά σε κάθε σημείο να βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός στο σημείο αυτό. Η εφαπτομένη της τροχιάς (f) π.χ. στο σημείο Α βρίσκεται έξω από τον κώνο φωτός στο Α.

Χωροχρονικά διαγράμματα όπως τα παραπάνω ονομάζονται *διαγράμματα Minkowski*.

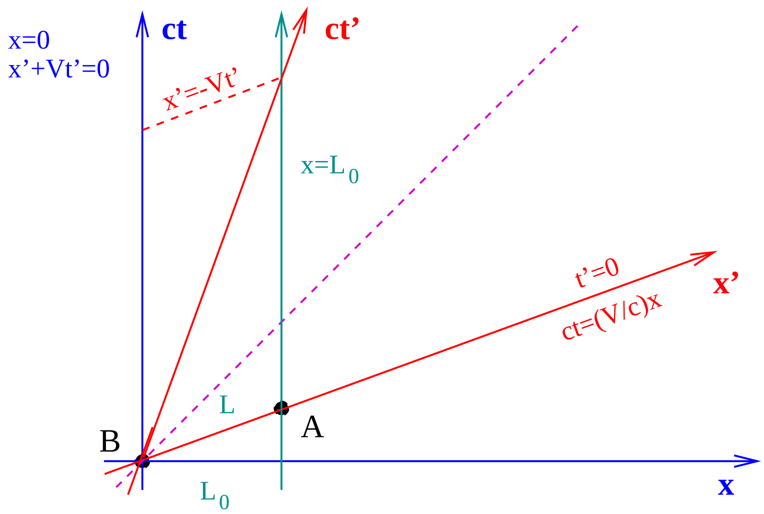
7.2 Διαστολή του χρόνου

Ας δούμε τώρα, πώς μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει σχήματα σαν το προηγούμενο και ιδέες από τη γεωμετρία του χωρόχρονου, για να μελετήσει διάφορα φαινόμενα.

Θα ξεκινήσουμε με το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου.

Εχουμε να συγκρίνουμε χρονικές αποστάσεις γεγονότων ως προς δύο αδρανειακούς παρατηρητές. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν μαθαίνοντας πώς θα σχεδιάσουμε τους άξονες των συντεταγμένων των δύο αυτών παρατηρητών στον χωρόχρονο.

Ας πάρουμε τον πρώτο (Σ) να έχει το σύστημα αξόνων $\{x, ct\}$ του Σχήματος 26 που ακολουθεί, και ας σχεδιάσουμε τον κώνο φωτός, που αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων.



Σχήμα 26: Τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς και η συστολή του μήκους

Ας πάρουμε το δεύτερο σύστημα αναφοράς $\{x', ct'\}$ (Σ'), που κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ, έτσι ώστε η αρχή των αξόνων του να συμπίπτει με την αρχή του Σ τη στιγμή $t = 0 = t'$. Ο άξονας των χρόνων του Σ' είναι η κοσμική γραμμή με $x' = 0$ [19]. Από την άλλη όμως, η κοσμική γραμμή με $x' = 0$ είναι η κοσμική τροχιά ενός σώματος στην αρχή των αξόνων του Σ'. Αρα είναι η γραμμή με εξίσωση

$$x = Vt \tag{7.1}$$

δηλαδή η γραμμή (ct') του σχήματος. Ο χωρικός άξονας x' του Σ' είναι τέτοιος ώστε η τροχιά του φωτεινού κύματος να είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι άξονες x' και ct'. Μόνο έτσι ικανοποιείται γραφικά το Δεύτερο Αξίωμα της Ειδικής Σχετικότητας, ότι δηλαδή η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

Η διαστολή του χρόνου. Φανταστείτε ένα ρολόϊ ακίνητο στην αρχή των αξόνων του Σ'. 'Οπως έχουμε υποθέσει, τη στιγμή που πέρναγε από την αρχή των αξόνων του Σ έδειχνε $t' = 0$, όπως και τα ρολόγια του Σ. Λίγο αργότερα, οι χωροχρονικές συντεταγμένες του ρολογιού είναι αυτές του γεγονότος Α του Σχήματος 27.

Σύμφωνα με τον Σ έχει περάσει χρόνος t_A και το ρολόι βρίσκεται στη θέση x_A. Αντίστοιχα, κατά τον Σ' το ρολόι βρίσκεται στη θέση $x'_A = 0$ και η ώρα είναι t'_A, οι συντεταγμένες του γεγονότος Α στο Σ'. Το ζητούμενο είναι να βρούμε τη σχέση που συνδέει τους χρόνους t_A και t'_A.

Χρησιμοποιούμε την (4.22) για το γεγονός Α και γράφουμε

$$c^2 t_A^2 - x_A^2 = c^2 t_A'^2 \tag{7.2}$$

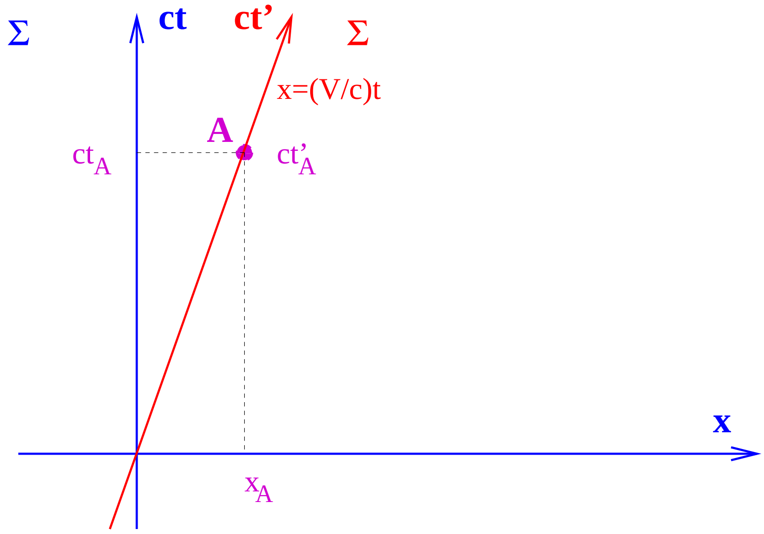
Απο την άλλη, το γεγονός Α βρίσκεται πάνω στη γραμμή με εξίσωση την (7.1), οπότε

$$x_A = V t_A \tag{7.3}$$

Ο συνδυασμός των δύο αυτών δίνει

$$t_A = \frac{t'_A}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \tag{7.4}$$

[19] Θυμηθείτε, κατ' αναλογίαν, οτι ο άξονας των y στο επίπεδο $x - y$ της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι η γραμμή με $x = 0$.



Σχήμα 27: Η διαστολή του χρόνου

τη γνωστή μας σχέση για την διαστολή του χρόνου. Για δύο γεγονότα που συμβαίνουν στην ίδια θέση ως προς τον Σ', ο Σ μετράει μεγαλύτερη χρονική απόσταση απ' ό,τι ο Σ' κατά τον παράγοντα $1/\sqrt{1-V^2/c^2}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν ισχύει το θεώρημα του Πυθαγόρα για τις χωροχρονικές αποστάσεις στον χωρόχρονο Minkowski. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται, σύμφωνα με την (7.2), με τη *διαφορά* των τετραγώνων των κάθετων πλευρών, και όχι με το άθροισμά τους.

7.3 Συστολή του μήκους

Θα εφαρμόσουμε τώρα την ίδια μεθοδολογία για να μελετήσουμε γραφικά το φαινόμενο της συστολής του μήκους. Για το σκοπό αυτό θα πάρουμε μια ράβδο ακίνητη στο σύστημα Σ του Σχήματος 26. Θα τοποθετήσουμε για απλότητα το ένα άκρο της ράβδου στην αρχή των αξόνων $x = 0$ του Σ. Το άλλο θα έχει συντεταγμένη $x = L_0$. Προφανώς, το μήκος της ράβδου κατά τον Σ είναι L_0. Η κοσμική τροχιά του ενός άκρου της ράβδου είναι ο άξονας των χρόνων ct του Σ, ενώ το άλλο άκρο διαγράφει την παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων τροχιά $x = L_0$ του Σχήματος 26.

Ας πάρουμε τώρα και έναν δεύτερο παρατηρητή Σ', που όπως στο προηγούμενο σχήμα κινείται ως προς τον Σ προς τα δεξιά με ταχύτητα V. Οι άξονες του Σ' είναι οι x' και ct' του Σχήματος 26. Εστω ότι ο Σ' μετράει και αυτός το μήκος της ράβδου. Για να το κάνει αυτό θα πρέπει σε κάποια χρονική στιγμή της επιλογής του, να σημειώσει τις θέσεις x'_Γ και x'_Δ του αριστερού και δεξιού άκρου της ράβδου. Το μήκος της κατά τον Σ' θα είναι $L = x'_\Delta - x'_\Gamma$.

Ας κάνουμε λοιπόν ακριβώς αυτό. Διαλέγουμε να κάνουμε τη μέτρηση τη χρονική στιγμή $t' = 0$. Το αριστερό άκρο της ράβδου βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $x'_B = 0$. Το δεξιό βρίσκεται σε εκείνο το σημείο της κοσμικής τροχιάς που αντιστοιχεί σε $t' = 0$, ήτοι στο σημείο Α με τετμημμένη x'_A. Για το γεγονός Α γράφουμε

$$0 - {x'}_A^2 = c^2 t_A^2 - L_0^2 \quad \rightarrow \quad L^2 = L_0^2 - c^2 t_A^2 \tag{7.5}$$

Το γεγονός Α βρίσκεται πάνω στην γραμμή $t' = 0$. Απο την (4.15) συμπεραίνουμε οτι τα σημεία της γραμμής αυτής ικανοποιούν τη σχέση $t = Vx/c^2$. Αρα ισχύει

$$t_A = V x_A / c^2 = V L_0 / c^2\,. \tag{7.6}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις καταλήγουμε στην γνωστή μας σχέση

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{7.7}$$

Τα μήκη μικραίνουν όταν κινούνται ως προς αυτόν που τα μετράει κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-V^2/c^2}$.

8 Τανυστές Lorentz

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και οι μετασχηματισμοί Lorentz μας διδάσκουν ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι σε μία οντότητα, τον χωρόχρονο. Σύμφωνα με την Αρχή της Σχετικότητας του Einstein, οι Νόμοι της Φυσικής είναι αναλλοίωτοι ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, που αναμειγνύουν τον χώρο και τον χρόνο, όπως οι συνήθεις στροφές αναμειγνύουν τις τρεις χωρικές διαστάσεις.

Η αναλλοιωτότητα των Νόμων της Φυσικής κάτω από στροφές κάνουν όλες τις κατευθύνσεις στο χώρο ισοδύναμες. Είναι αδύνατον να οριστεί με αντικειμενικό τρόπο ο προσανατολισμός ενός παρατηρητή στο χώρο. Οι Νόμοι της Φυσικής έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους παρατηρητές, που διαφέρουν μεταξύ τους μόνο κατά τον προσανατολισμό ή τη θέση της αρχής των αξόνων τους. Γι' αυτό οι Νόμοι της Φυσικής όπως ο νόμος του Νεύτωνα $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, ή οι νόμοι του Maxwell $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$ ή $\nabla\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}+\partial\mathbf{E}/\partial t$, συνδέουν ποσότητες με καλά καθωρισμένο τρόπο μετασχηματισμού σε στροφές. Τα δύο μέλη καθενός από τους νόμους αυτούς μετασχηματίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο κάτω από στροφές (διανύσματα ή βαθμωτά), εξασφαλίζοντας έτσι αυτόματα το ότι έχουν την ίδια μορφή ως προς παρατηρητές με διαφορετικό προσανατολισμό.

Αντίστοιχα, η επέκταση της αναλλοιωτότητας των Νόμων της Φυσικής ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, που αναμειγνύουν τις χωρικές κατευθύνσεις με το χρόνο ως ένα είδος "στροφών" στο χωρόχρονο, έχουν ως συνέπεια την αδυναμία αντικειμενικού ορισμού και της ταχύτητας ενός παρατηρητή, επιπλέον του προσανατολισμού και της αρχής των αξόνων του. Το γεγονός ότι οι γνήσιοι μετασχηματισμοί Lorentz, αυτοί δηλαδή που συσχετίζουν παρατηρητές με μή μηδενική σχετική ταχύτητα, αναμειγνύουν τις χωρικές κατευθύνσεις με το χρόνο, σημαίνει ότι οι Νόμοι της Φυσικής θα έχουν την απλούστερη και διαυγέστερη μορφή αν διατυπωθούν χρησιμοποιώντας ποσότητες, που δεν ξεχωρίζουν τις χωρικές από τη χρονική κατεύθυνση.

Παρ' όλα αυτά, ο φορμαλισμός που χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα χειρίζεται ξεχωριστά τον χρόνο από τον χώρο. Χρησιμοποιεί το χρόνο Δt και το διάνυσμα θέσης $\Delta\mathbf{r}$ χωριστά, ενώ ο μετασχηματισμός Lorentz (4.17) τα αναμειγνύει. Το ίδιο με την ενέργεια και το διάνυσμα της ορμής $\mathbf{p}$. Η φυσιολογική προσέγγιση με βάση τα παραπάνω είναι να ορίσει κανείς "διανύσματα" με τέσσερις συνιστώσες, τη χρονική και τις τρεις χωρικές επί ίσοις όροις. Να "συσκευάσει" κάτω από κοινό σύμβολο ποσότητες, που αναμειγνύονται φυσιολογικά από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Αυτό θα κάνουμε τώρα, ξεκινώντας με μια σύντομη υπενθύμιση των αντίστοιχων ορισμών για τις στροφές στο χώρο. Θα ορίσουμε δηλαδή τα διανύσματα και τις γενικεύσεις τους, τους τανυστές, ως ποσότητες με χαρακτηριστικούς τρόπους αλλαγής κάτω από τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Συνδυάζοντας τανυστές θα μπορούμε να κατασκευάζουμε νέους τανυστές ή σχετικιστικά αναλλοίωτα, όπως η λαγκραντζιανή και η "δράση" φυσικών συστημάτων και να διατυπώσουμε τους Νόμους της Φυσικής με τρόπο που να αναδεικνύει την αναλλιωτότητά τους ως προς τους μετασχηματισμούς Poincaré.

8.1 Διανύσματα και τανυστές ως προς τις στροφές στο χώρο

Ο τριδιάστατος Ευκλείδειος χώρος

Ας θεωρήσουμε τον τριδιάστατο Ευκλείδιο χώρο. Ως γνωστόν, το στοιχείο μήκους σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\{x^1, x^2, x^3\}$ στο χώρο αυτό δίνεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα και είναι

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\,. \tag{8.1}$$

Ισοδύναμες εναλλακτικές γραφές του στοιχειώδους μήκους ds^2 είναι

$$ds^2 = (dx^1\ dx^2\ dx^3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^1\\dx^2\\dx^3\end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3}\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j \equiv \delta_{ij}\,dx^i\,dx^j\,, \tag{8.2}$$

όπου

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 1\,,\ \ i=j\\ &= 0\,,\ \ i\neq j\end{aligned} \tag{8.3}$$

δηλαδή τα δ_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα μονάδα $\mathbf{1}$. Επίσης, στο τελευταίο βήμα της (8.2) εισάγαμε τη *σύμβαση του Einstein*, σύμφωνα με την οποία όταν ένας δείκτης εμφανίζεται σε ένα μονώνυμο δύο φορές, τότε το μονώνυμο αυτό παριστά το άθροισμα των μονωνύμων με το δείκτη να αθροίζεται πάνω σε όλες τις τιμές του.

Στροφές στο χώρο

Ορισμός: Στροφές στο χώρο ορίζονται εκείνοι οι μετασχηματισμοί $x^i \to x'^i = x'^i(x)$ των συντεταγμένων, που αφήνουν αναλλοίωτες τις αποστάσεις, δηλαδή για τους οποίους ισχύει:

$$ds'^2 = ds^2 \quad \leftrightarrow \quad \delta_{ij} dx'^i dx'^j = \delta_{kl} dx^k dx^l \tag{8.4}$$

ανάμεσα στα διαφορικά των συντεταγμένων για κάθε ζευγάρι γειτονικών σημείων πριν και μετά τον μετασχηματισμό.

Γραμμικότητα των στροφών: Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο πιό γενικός μετασχηματισμός στροφής είναι γραμμικός.

Πράγματι. 'Εστω $x'^i = x'^i(x)$ ο ζητούμενος γενικός μετασχηματισμός στροφής. Τα διαφορικά των νέων συντεταγμένων συναρτήσει των παλαιών είναι $dx'^i = (\partial x'^i/\partial x^k) dx^k$. Για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός, πρέπει να έχει αντίστροφο, και επομένως η ορίζουσα του πίνακα $M \equiv (\partial x'^i/\partial x^k)$ του μετασχηματισμού πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός. Αντικαθιστώντας στον ορισμό (8.4) της στροφής προκύπτει η σχέση $\delta_{ij}(\partial x'^i/\partial x^k)(\partial x'^j/\partial x^l) = \delta_{kl}$ για κάθε τιμή των k και l. Παραγωγίζω την τελευταία ως προς x^m και παίρνω:

$$\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} \right) = 0 \tag{8.5}$$

για κάθε τριάδα δεικτών k, l, m. Προσθέτω στην (8.5) τη σχέση που προκύπτει με την εναλλαγή $m \leftrightarrow k$, και αφαιρώ τη σχέση που παίρνω πάλι από την (8.5) εναλλάσοντας $m \leftrightarrow l$. Τέλος, αναπτύσσω τις παραγωγίσεις των τριών γινομένων στις παρενθέσεις. Μετά και από την άθροιση πάνω στο δείκτη j καταλήγω στην

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} = 0 \,, \tag{8.6}$$

η οποία για κάθε ζεύγος $\{k, m\}$ έχει τη μορφή γραμμικού ομογενούς συστήματος με αγνώστους τις ποσότητες $(\partial^2 x'^i)/(\partial x^k \partial x^m)$ και πίνακα τον $M = (\partial x'_i/\partial x^l)$. Δεδομένου ότι, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ο M έχει μή μηδενική ορίζουσα, η λύση του συστήματος είναι η τετριμμένη

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^m} = 0 \tag{8.7}$$

για όλες τις τιμές των δεικτών i, k, m. 'Αρα, ο ζητούμενος μετασχηματισμός $x'^i = x'^i(x)$ είναι γραμμικός. Ο.Ε.Δ.

Επομένως, για τον γενικό μετασχηματισμό ισχύει ότι

$$x'^i = R^i{}_j x^j + a^i \,, \quad R^i{}_j, a^k = \text{constant} \,. \tag{8.8}$$

με τις παραμέτρους $\{a^k\}$ να περιγράφουν τυχαίες χωρικές μετατοπίσεις.

Από την (8.8) προκύπτει ο μετασχηματισμός των διαφορικών

$$dx'^i = R^i{}_j dx^j \,, \quad R^i{}_j = \text{constant} \,. \tag{8.9}$$

Ο πίνακας στροφής είναι ορθογώνιος. Αντικαθιστώντας την (8.9) στην (8.4) συμπεραίνομε ότι τα στοιχεία του πίνακα R πρέπει επιπλέον να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\delta_{ij} R^i{}_k \, R^j{}_l = \delta_{kl} \,, \tag{8.10}$$

που ισοδυναμούν με τη δήλωση ότι ο πίνακας R είναι ορθογώνιος ($R^T R = \mathbf{1}$) [20].

[20] Με τον πρώτο δείκτη σε ένα πίνακα (ανεξαρτήτως αν είναι πάνω ή κάτω) να δείχνει τις γραμμές και τον δεύτερο τις στήλες, η (8.10) γράφεται ισοδύναμα: $(R^T)_k{}^i \delta_{ij} R^j{}_l = \delta_{kl}$, ήτοι $R^T R = \mathbf{1}$

Διανύσματα και τανυστές

Ορισμός: Τρεις ποσότητες V^i , $i = 1, 2, 3$, αποτελούν τις τρεις συνιστώσες ενός *διανύσματος*, τότε και μόνον τότε, εξ' ορισμού, αν κάτω από στροφές μετασχηματίζονται όπως οι $\{dx^i\}$ στη σχέση (8.9), δηλαδή αν

$$V'^i = R^i{}_j V^j . \tag{8.11}$$

Ο ορισμός αυτός γενικεύεται. Οι 3^n ποσότητες $T^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, που μετασχηματίζονται κάτω από τη δράση των στροφών σύμφωνα με τον κανόνα

$$T'^{\,i_1 i_2 \ldots i_n} = R^{i_1}{}_{j_1} R^{i_2}{}_{j_2} \ldots R^{i_n}{}_{j_n} T^{j_1 j_2 \ldots j_n} , \tag{8.12}$$

λέμε ότι αποτελούν τις συνιστώσες ενός *τανυστή n-οστής τάξης*, ή με n δείκτες.

ΣΧΟΛΙΟ: Ο προσεκτικός αναγνώστης έχει παρατηρήσει πως ό,τι είπαμε για τις στροφές στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων ισχύει γενικά σε κάθε διάσταση. 'Ολες οι σχέσεις και οι αποδείξεις είναι οι ίδιες, με μόνη διαφορά ότι οι δείκτες $i, j, k, \ldots$ παίρνουν ο καθένας τιμές $1, 2, 3, \ldots, D$, όπου D η διάσταση του χώρου. Μάλιστα, όπως θα δούμε παρακάτω, τα περισσότερα συμπεράσματα και τύποι του υποκεφαλαίου αυτού επεκτείνονται απλά και για μετασχηματισμούς Lorentz σε χωρόχρονους Minkowski κάθε διάστασης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι τρεις ποσότητες $v^1 \equiv dx^1/dt, v^2 \equiv dx^2/dt, v^3 \equiv dx^3/dt$ αποτελούν τις τρεις συνιστώσες διανύσματος.

2. Να αποδείξετε ότι οι 9 ποσότητες $V^{ij} \equiv x^i v^j$ με $i, j = 1, 2, 3$, και v^i τις συνιστώσες της ταχύτητας, αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή δεύτερης τάξης.

3. (α) Αν p^i οι τρεις συνιστώσες της ορμής, να αποδείξετε οτι οι ποσότητες $S^{ij} \equiv x^i p^j + x^j p^i$ και $A^{ij} \equiv x^i p^j - x^j p^i$ αποτελούν ως προς τις στροφές τανυστές (συμμετρικό και αντισυμμετρικό, αντίστοιχα) δεύτερης τάξης, ενώ η ποσότητα $x^i p^i$ είναι βαθμωτό μέγεθος (δηλαδή αναλλοίωτο κάτω από στροφές στο χώρο).

(β) Να αναλύσετε τον γενικό τανυστή με δύο δείκτες σε άθροισμα τριών τανυστών, ενός συμμετρικού με ίχνος μηδέν, ενός αντισυμμετρικού και ενός βαθμωτού και να δείξετε ότι ο γενικός 9×9 πίνακας μετασχηματισμού των τανυστών με δύο δείκτες μπορεί σε κατάλληλη βάση να γραφεί ως πίνακας block-diagonal, με υποπίνακες διαστάσεων 5×5, 3×3 και 1×1 στη διαγώνιό του.

8.2 Διανύσματα και τανυστές Lorentz

Ο χωρόχρονος Minkowski

Συνοψίζοντας τα ευρήματα των προηγούμενων κεφαλαίων έχουμε καταλήξει ότι η αρένα πάνω στην οποία λαμβάνουν χώρα τα φαινόμενα που εξετάζομε είναι ο χωρόχρονος Minkowski. Επιπλέον, ο χωρόχρονος Minkowski είναι εφοδιασμένος με ένα κανόνα μέτρησης χωροχρονικών αποστάσεων. Στο σύστημα συντεταγμένων $\{x^0 \equiv ct, x^1, x^2, x^3\}$, με $-\infty < x^\mu < +\infty$, το οποίο θα ονομάζομε "Καρτεσιανό", το στοιχείο μήκους είναι

$$ds^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 . \tag{8.13}$$

Ο τετραδιάστατος αυτός χώρος με στοιχείο μήκους το (8.13) είναι ο ορισμός του χωρόχρονου Minkowski.

Χρησιμοποιώντας τις ποσότητες dx^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, και τον πίνακα η με στοιχεία

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

η (8.13) γράφεται ισοδύναμα

$$ds^2 = (dx^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^0\\ dx^1\\ dx^2\\ dx^3\end{pmatrix} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\,, \tag{8.15}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη *σύμβαση του Einstein*, ότι δηλαδή ένα μονώνυμο στο οποίο ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές, συμβολίζει το άθροισμα όλων των μονωνύμων που προκύπτουν βάζοντας στη θέση του δείκτη μια-μια τις τιμές του.

Ο 4×4 πίνακας η ονομάζεται *μετρική* του χωρόχρονου Minkowski.

Μετασχηματισμοί Lorentz και Poincaré

Ορισμός: Οι μετασχηματισμοί Poincaré είναι εκείνοι οι μετασχηματισμοί $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x)$ των συντεταγμένων, που αφήνουν αναλλοίωτο το στοιχείο μήκους (8.13), δηλαδή ικανοποιούν την

$$ds'^2 = ds^2 \quad \leftrightarrow \quad \eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\lambda\rho}dx^\lambda dx^\rho \tag{8.16}$$

Ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα όπως και για τις στροφές στο χώρο, καταλήγει κανείς εύκολα στο συμπέρασμα ότι οι μετασχηματισμοί Poincaré: (α) είναι γραμμικοί, δηλαδή ότι ο πιό γενικός μετασχηματισμός που ικανοποιεί την (8.16) γράφεται στη μορφή

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu\,, \quad \Lambda^\mu{}_\nu, a^\mu = \text{constants} \tag{8.17}$$

και (β) ότι ο σταθερός πίνακας Λ ικανοποιεί επιπλέον τη σχέση

$$\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \qquad (\Lambda^T\eta\,\Lambda = \eta)\,, \tag{8.18}$$

Ο μετασχηματισμός $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ περιγράφει *μετατοπίσεις* της αρχής των αξόνων του συστήματος των χωροχρονικών συντεταγμένων και δεν θα μας απασχολήσουν άλλο εδώ. Το σύνολο των πινάκων Λ, που ικανοποιούν τη σχέση (8.18), περιέχουν ως υποσύνολο τις *χωρικές στροφές*. Ωστόσο, η σχέση (8.18) ορίζει επιπλέον και τους *γνήσιους μετασχηματισμούς Lorentz*, που δρούν και στη χρονική συντεταγμένη x^0. Για παράδειγμα, ο πίνακας Λ του μετασχηματισμού Lorentz που αντιστοιχεί σε σχετική ταχύτητα V στη κατεύθυνση του άξονα των x, είναι ο πίνακας (4.18) και, όπως μπορείτε να ελέγξετε, ικανοποιεί τη σχέση (8.18).

Χρήσιμες σχέσεις

Τα στοιχεία του αντιστρόφου η^{-1} του η, που προφανώς ισούται με τον η, συμβολίζονται με $\eta^{\mu\nu}$. Ικανοποιούν εξ' ορισμού του αντιστρόφου πίνακα τη σχέση $\eta^{-1}\,\eta = \mathbf{1}$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$\eta^{\mu\nu}\,\eta_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.19}$$

Ο αντίστροφος Λ^{-1} του πίνακα Λ με στοιχεία $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ ικανοποιεί εξ' ορισμού τη σχέση

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\,\Lambda^\nu{}_\rho = \delta^\mu_\rho\,. \tag{8.20}$$

Τα στοιχεία του Λ^{-1} υπολογίζονται από αυτά του Λ ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (8.18) επί $\eta^{\sigma\lambda}$ και παίρνουμε

$$\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma\,\eta^{\sigma\lambda} = \eta_{\rho\sigma}\,\eta^{\sigma\lambda} = \delta^\lambda_\rho \tag{8.21}$$

ή ισοδύναμα

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma\,\eta^{\sigma\lambda}\,\Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\lambda{}_\rho\,, \tag{8.22}$$

από την οποία συγκρίνοντας με την (8.20) βρίσκουμε

$$(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma\,\eta^{\sigma\lambda} \equiv \Lambda_\mu{}^\lambda \tag{8.23}$$

Διανύσματα και τανυστές

Τέσσερις ποσότητες (V^0, V^1, V^2, V^3), που κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz Λ μετασχηματίζονται όπως οι (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3), δηλαδή οι τιμές τους αλλάζουν από V^μ σε V'^μ σύμφωνα με τη σχέση

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, V^\nu \tag{8.24}$$

λέμε ότι αποτελούν τις τέσσερις *ανταλλοίωτες συνιστώσες* του τετρανύσματος V.

Από τις ανταλλοίωτες συνιστώσες V^μ ενός διανύσματος, ορίζω τις *συναλλοίωτες συνιστώσες* V_μ του:

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} \, V^\nu \qquad (V_0 = V^0, V_1 = -V^1, V_2 = -V^2, V_3 = -V^3) \tag{8.25}$$

Κάτω από το μετασχηματισμό Lorentz Λ αυτές μετασχηματίζονται ως εξής [21]:

$$V'{}_\mu = \eta_{\mu\nu} \, V'^\nu = \eta_{\mu\nu} \, \Lambda^\nu{}_\rho \, V^\rho = \eta_{\mu\nu} \, \Lambda^\nu{}_\rho \, \delta^\rho_\sigma \, V^\sigma = \eta_{\mu\nu} \, \Lambda^\nu{}_\rho \, \eta^{\rho\lambda} \, \eta_{\lambda\sigma} \, V^\sigma = (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu \, V_\lambda \equiv \Lambda_\mu{}^\lambda \, V_\lambda \tag{8.26}$$

Αντίστοιχα, οι 16 ποσότητες $\{T^{00}, T^{01}, ..., T^{33}\}$, που κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\ \alpha} \, \Lambda^\nu_{\ \beta} \, T^{\alpha\beta} \tag{8.27}$$

αποτελούν τις *ανταλλοίωτες συνιστώσες* ενός τανυστή T δεύτερης τάξης ή με δύο δείκτες.

Γενικά, οι 4^{n+m} ποσότητες $T^{\mu_1\mu_2....\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_m}$, που σχετίζονται με τις ανταλλοίωτες συνιστώσες $T^{\mu_1\mu_2...\mu_n\sigma_1\sigma_2....\sigma_m}$ τανυστή T τάξης $n+m$ με βάση τη σχέση

$$T^{\mu_1\mu_2....\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_m} = \eta_{\nu_1\sigma_1} \, \eta_{\nu_2\sigma_2} ....\eta_{\nu_m\sigma_m} \, T^{\mu_1\mu_2...\mu_n\sigma_1\sigma_2....\sigma_m} \tag{8.28}$$

και που μετασχηματίζονται κατά Lorentz σύμφωνα με

$$T'^{\mu_1\mu_2....\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_m} = \Lambda^{\mu_1}_{\ \lambda_1} \, \Lambda^{\mu_2}_{\ \lambda_2} ....\Lambda^{\mu_n}_{\ \lambda_n} \, \Lambda_{\nu_1}^{\ \rho_1} \, \Lambda_{\nu_2}^{\ \rho_2} .....\Lambda_{\nu_m}^{\ \rho_m} \, T^{\lambda_1\lambda_2....\lambda_n}{}_{\rho_1\rho_2...\rho_m} \tag{8.29}$$

λέμε ότι είναι οι συνιστώσες ενός μικτού τανυστή με n ανταλλοίωτους και m συναλλοίωτους δείκτες.

Χρησιμοποιώντας τη μετρική $\eta_{\mu\nu}$ του χωρόχρονου Minkowski, ορίζεται το **εσωτερικό γινόμενο** $U \cdot V$ δύο τετρανυσμάτων, καθώς και το **μέτρο** V ενός τετρανύσματος από τις σχέσεις

$$U \cdot V \equiv U_\mu V^\mu = \eta_{\mu\nu} \, U^\nu V^\mu \,, \quad V^2 \equiv V \cdot V = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \,, \tag{8.30}$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι και οι δύο αυτές ποσότητες είναι αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

[21] Προσοχή στη θέση των δεικτών των πινάκων που αναπαριστούν τους μετασχηματισμούς Lorentz. Οι πίνακες Λ και Λ^{-1} έχουν κατά σύμβαση τον πρώτο δείκτη “επάνω” και τον δεύτερο “κάτω”. Επίσης, κατά τη γραφή του γινομένου δύο πινάκων (ή πίνακα επί διάνυσμα) με τα στοιχεία τους, ακολουθείται η σύμβαση να ταυτίζεται ο κάτω (πάνω) δείκτης του πρώτου πίνακα με τον πάνω (κάτω) του δεύτερου. Ακριβώς για να διατηρηθεί αυτή η σύμβαση και για τη δράση μετασχηματισμών Lorentz σε συναλλοίωτους δείκτες, *ορίστηκαν* οι ποσότητες $\Lambda_\mu{}^\lambda \equiv (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu$ στη τελευταία ισότητα της (8.26).

9 Μηχανική του υλικού σημείου

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη μηχανική υλικού σημείου στο χωρόχρονο, κάνοντας χρήση εννοιών και επιχειρημάτων βασισμένων στην γεωμετρία του χώρου Minkowski και την αναλλοιωτότητα των Νόμων της Φυσικής σε μετασχηματισμούς Poincaré. Η γεωμετρική αυτή θεμελίωση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, θα βοηθήσει αφ' ενός στην ανάδειξη του ρόλο της συμμετρίας στην ανακάλυψη των Νόμων της Φυσικής και, αφ' ετέρου, θα κάνει πιο κατανοητή την διατύπωση της γεωμετρικής θεωρίας της βαρύτητας, δηλαδή της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, στο δεύτερο μέρος του βιβλίου.

9.1 Η σχετικιστική δράση ελεύθερου υλικού σημείου

Η κοσμική τροχιά υλικού σημείου

Κάθε *κοσμική τροχιά υλικού σημείου* στο χωρόχρονο περιγράφεται με τέσσερις συναρτήσεις

$$x^{\mu}(\sigma)\,, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{9.1}$$

συναρτήσεις μιας αυθαίρετης συνεχούς παραμέτρου σ, που αλλάζει μονότονα καθώς διατρέχομε τη τροχιά. Η παράμετρος σ απλά δίνει ονόματα στα σημεία της τροχιάς και τα ξεχωρίζει το ένα από το άλλο. Ορίζει, με άλλα λόγια, μια 1-1 απεικόνιση από τα σημεία της τροχιάς στους πραγματικούς αριθμούς. Για την περιγραφή τροχιών σωματιδίων με μάζα χρησιμοποιούμε πολλές φορές ως παράμετρο σ το αναλλοίωτο "μήκος" s της καμπύλης (ή ισοδύναμα τον ιδιοχρόνο τ), μετρούμενο με αρχή κάποιο αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο της. Αυτό όμως δεν είναι υποχρεωτικό και επίσης δεν μπορεί να εφαρμοστεί για σωμάτια με μάζα μηδέν, αφού για τις τροχιές των τελευταίων ισχύει $ds = 0$ και επομένως το s δεν αλλάζει κατά μήκος τους.

Η λαγκραντζιανή και η δράση

Σύμφωνα με το φορμαλισμό της λαγκραντζιανής μηχανικής, αφετηρία για τη μελέτη ενός φυσικού συστήματος είναι η αντίστοιχη λαγκραντζιανή και το ολοκλήρωμα δράσης του συστήματος. Για το ελεύθερο σωμάτιο, που μελετάμε εδώ, η λαγκραντζιανή θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής προφανείς απαιτήσεις: (α) να είναι συνάρτηση των συντεταγμένων $x^{\mu}(\sigma)$ και των γενικευμένων "ταχυτήτων" $dx^{\mu}/d\sigma$, ώστε να οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις κίνησης δεύτερης και όχι ανώτερης τάξης, (β) η αντίστοιχη δράση για δοσμένη τροχιά ανάμεσα σε δύο γεγονότα Α και Β να είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς Poincaré, ώστε οι εξισώσεις κίνησης, που θα προκύψουν, να έχουν την ίδια μορφή ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, (γ) να συνεπάγεται ότι η παράμετρος σ μπορεί πράγματι να επιλεγεί ελεύθερα, και (δ) να οδηγεί σε εξισώσεις κίνησης με το σωστό Νευτώνειο όριο.

Για σωμάτια με μη μηδενική μάζα m η μόνη δράση, που ικανοποιεί όλα αυτά τα κριτήρια, είναι το αναλλοίωτο μήκος της τροχιάς ανάμεσα στα Α και Β επι μια σταθερά, δηλαδή

$$S = m\,c\int_A^B ds = m\,c\int_A^B \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} = m\,c\int_{\sigma_A}^{\sigma_B}\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\sigma}\frac{dx^{\nu}}{d\sigma}}d\sigma\,, \tag{9.2}$$

όπου η επιλογή της σταθεράς, όπως θα αιτιολογηθεί παρακάτω, έγινε με βάση τη συνθήκη (δ). Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η στοιχειώδης διαφορά συντεταγμένων dx^{μ} πάνω στη τροχιά δίδεται από τη σχέση $dx^{\mu} = (\partial x^{\mu}/\partial\sigma)d\sigma$. Τέλος, αλλαγή της παραμέτρησης της καμπύλης από σ σε $\sigma' = \sigma'(\sigma)$ δεν αλλάζει τη δράση, αφού $dx^{\mu}/d\sigma' = (dx^{\mu}/d\sigma)(d\sigma/d\sigma')$ και, επομένως, η ολοκληρωτέα ποσότητα $[\eta_{\mu\nu}(dx^{\mu}/d\sigma')(dx^{\nu}/d\sigma')]^{1/2}d\sigma' = [\eta_{\mu\nu}(dx^{\mu}/d\sigma)(dx^{\nu}/d\sigma)]^{1/2}d\sigma$ παραμένει η ίδια.

Ισοδύναμα, η λαγκραντζιανή ελεύθερου σωματιδίου μάζας $m \neq 0$ είναι

$$L(x^{\mu}(\sigma), dx^{\mu}(\sigma)/d\sigma) = m\,c\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\sigma}\frac{dx^{\nu}}{d\sigma}} \tag{9.3}$$

Η λαγκραντζιανή αυτή και η δράση (9.2), στις οποίες οδηγηθήκαμε *μονοσήμαντα* με επιχειρήματα βασισμένα σε συμμετρίες και ιδιότητες του χωρόχρονου Minkowski, οδηγούν, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, στο πλήρες οικοδόμημα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Τετραορμή και τετραταχύτητα υλικού σημείου

Η συζυγής ορμή της θέσης x^μ του σωματιδίου, δίδεται σύμφωνα με τη μηχανική Lagrange από τη σχέση

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\sigma)} = m\,c\,\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu/d\sigma}{\sqrt{\eta_{\alpha\beta}(dx^\alpha/d\sigma)(dx^\beta/d\sigma)}} = m\,c\,\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\,, \tag{9.4}$$

όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε την τετραγωνική ρίζα του παρονομαστή με το ίσο της $ds/d\sigma$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\{x^0 = ct, \mathbf{x}\}$ των προηγούμενων κεφαλαίων για τις x^μ, το στοιχείο μήκους της τροχιάς του σώματος παίρνει τη μορφή

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2} = cdt\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \tag{9.5}$$

όπου $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ η ταχύτητα του σώματος, και οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της τετραορμής είναι

$$p^\mu = m\,c\,\frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \tag{9.6}$$

Συνοψίζοντας, η συζυγής ορμή p της θέσης x είναι τετράνυσμα (διότι είναι πηλίκο του τετρανύσματος dx^μ δια του βαθμωτού ds επί μια σταθερά) με διαστάσεις ορμής, με χωρικές ανταλλοίωτες συνιστώσες την φυσική ορμή $\mathbf{p}$ του σώματος και χρονική την ενέργεια του σώματος δια της ταχύτητας του φωτός. Είναι φυσικό να το ονομάζουμε *τετραορμή* του σώματος. Επίσης, είναι προφανές από τον ορισμό του τετρανύσματος, ότι οι ποσότητες E/c και $\mathbf{p}$ μετασχηματίζονται κατά Lorentz, όπως ακριβώς οι ποσότητες $dx^\mu = (cdt, d\mathbf{x})$.

Το τετράνυσμα $u \equiv c\,dx/ds$ με διαστάσεις ταχύτητας και ανταλλοίωτες συνιστώσες στο σύστημα $\{x^0 = ct, \mathbf{x}\}$ τις

$$u^\mu \equiv c\frac{dx^\mu}{ds} = c\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\right) = c\gamma(v)(1, \mathbf{v}/c) \tag{9.7}$$

ονομάζεται *τετραταχύτητα* του υλικού σημείου.

Το τετράγωνο του μέτρου της τετραταχύτητας είναι (εξ' ορισμού και χρησιμοποιώντας τη σχέση $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$)

$$u^2 \equiv \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = c^2\,. \tag{9.8}$$

Επομένως, αντίστοιχα για το τετράγωνο της ορμής έχουμε:

$$p^2 \equiv \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2u^2 = m^2c^2\,, \tag{9.9}$$

που είναι η γνωστή μας σχέση:

$$E^2 - c^2\,\mathbf{p}^2 = m^2\,c^4\,. \tag{9.10}$$

Κίνηση ελεύθερου σώματος

Σύμφωνα με την Αρχή Ελάχιστης Δράσης, ανάμεσα στα γεγονότα Α και Β το ελεύθερο σώμα θα ακολουθήσει εκείνη τη τροχιά για την οποία η δράση έχει ακρότατο. Δηλαδή, τη τροχιά που ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\sigma)}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\,,\quad \mu = 0,1,2,3, \tag{9.11}$$

που για την λαγκραντζιανή (9.3) γράφονται διαδοχικά

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx^\nu/d\sigma}{\sqrt{\eta_{\alpha\beta}(dx^\alpha/d\sigma)(dx^\beta/d\sigma)}}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)\frac{ds}{d\sigma} = 0\,,\quad \nu = 0,1,2,3. \tag{9.12}$$

Δεδομένου ότι $ds/d\sigma \neq 0$, οι εξισώσεις της τροχιάς $x^\mu(s)$ του ελεύθερου υλικού σημείου είναι:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0\,,\quad \mu = 0,1,2,3\,,\qquad \eta_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 1\,. \tag{9.13}$$

Η δεύτερη από αυτές έχει να κάνει με το μέτρο της τετραταχύτητας (9.8), που αποδείξαμε παραπάνω, και εκφράζει το ότι η παράμετρος s είναι ακριβώς το μήκος της τροχιάς $x^\mu(s)$, ενώ χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ορμής, οι τέσσερις πρώτες γράφονται ισοδύναμα

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0\,, \tag{9.14}$$

και εκφράζουν τη διατήρηση της τετραορμής κατά την κίνηση του υλικού σημείου.

Η λύση των εξισώσεων αυτών είναι τετριμμένη. Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες (9.6) της τετραορμής σε Καρτεσιανό σύστημα, και κάνοντας χρήση της σχέσης $dt/ds = \gamma(v)/c$ από τη μηδενική συνιστώσα της (9.7), παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0\,. \tag{9.15}$$

Η πρώτη είναι η γνωστή εξίσωση κίνησης ελεύθερου σώματος (ισοδύναμη με τη διατήρηση της ορμής του) ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς και η δεύτερη εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας. Από τη δεύτερη συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, και από τη πρώτη ότι το διάνυσμα **v** είναι σταθερό. *Ελεύθερο σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα.*

Επομένως, η εξίσωση (9.14) είναι ισοδύναμη με τις (9.15). Και οι δύο μορφές περιγράφουν την κίνηση ελεύθερου σώματος. Το πλεονέκτημα, ωστόσο, της πρώτης γραφής έναντι της δεύτερης, είναι το ότι είναι γραμμένη σε τανυστική μορφή, που αφ' ενός μειώνει τον αριθμό των εξισώσεων από δύο σε μία, και αφ' ετέρου, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αμέσως ότι ισχύει με την ίδια μορφή σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Με άλλα λόγια, αν για τον παρατηρητή Σ ισχύει η (9.14), για τον παρατηρητή Σ' θα ισχύει η

$$\frac{dp'^\mu}{ds} = 0\,, \tag{9.16}$$

όπου οι p'^μ δίνονται συναρτήσει των p^μ από το μετασχηματισμό Lorentz, που συνδέει τους δύο αδρανειακούς παρατηρητές.

Οι τροχιές $x^\mu(s)$ ελεύθερου σώματος

Ας δούμε πώς καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα λύνοντας κατ' ευθείαν τις εξισώσεις (9.13). Η γενική λύση των (9.13) είναι γραμμική στη μεταβλητή s

$$x^\alpha(s) = u^\alpha\, s + \kappa^\alpha\,, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3\,. \tag{9.17}$$

ενώ η δεύτερη συνεπάγεται οτι οι παράμετρες u^α ικανοποιούν την

$$\eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta = (u^0)^2 - (u^i)^2 = 1\,. \tag{9.18}$$

Από τις πρώτες η $\alpha = 0$ γράφεται

$$s = \frac{x^0 - \kappa^0}{u^0} \tag{9.19}$$

και αντικαθιστώντας στις υπόλοιπες τρείς, σε συνδυασμό με τετριμμένες αλλαγές στα ονόματα των σταθερών, παίρνουμε:

$$x^i = \frac{u^i}{u^0}\, x^0 + h^i \equiv \frac{v^i}{c}\, x^0 + h^i\,,\ i = 1, 2, 3\,, \tag{9.20}$$

ή ισοδύναμα, ενθυμούμενοι οτι $x^0 = c\,t$ και οτι οι x^i είναι οι συντεταγμένες θέσης του σώματος στο Καρτεσιανό σύστημα Minkowski, γράφουμε για τη θέση συναρτήσει του χρόνου t τις γνωστές ευθείες τροχιές του ελεύθερου σώματος

$$x^i(t) = v^i\, t + x^i(0) \tag{9.21}$$

με την ταχύτητα v^i και αρχική θέση $x^i(0)$ να προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Σχόλιο 1: Από τις 8 ανεξάρτητες παραμέτρους u^α και κ^α της γενικής λύσης, μία (π.χ. η u^0) καθορίζεται από τη σχέση (9.18), οι 6 (u^i και κ^i) προσδιορίζονται από την αρχική θέση και αρχική ταχύτητα, και η όγδοη κ^0 από το σημείο της τροχιάς, που ορίζουμε ως αρχή για τη μέτρηση της απόστασης s.

Σχόλιο 2: Από την (9.20) έχουμε οτι $u^i = v^i\, u^0/c$, και αντικαθιστώντας στην (9.18) $u^0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Οπότε, η (9.19) είναι ο τύπος της διαστολής του χρόνου. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη σχέση $s = c\,\tau$ της απόστασης s και του ιδιοχρόνου , και ορίζοντας $x^0 = c\,t$ και $\kappa^0 = c\,t_0$ η (9.19) γίνεται

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(t - t_0)\,. \tag{9.22}$$

Η τροχιά ελεύθερου σώματος ως γεωδαισιακή στο χώρο Minkowski

Οπως σε κάθε χώρο, *γεωδαισιακή* καμπύλη ανάμεσα σε δύο σημεία του χωρόχρονου Minkowski ορίζεται η καμπύλη με το ελάχιστο [22] μήκος, που συνδέει τα σημεία αυτά.

Το ολοκλήρωμα της δράσης ελεύθερου υλικού σημείου (9.2) ανάμεσα σε δύο γεγονότα A και B του χωροχρόνου Minkowski είναι ανάλογο της απόστασης των A και B. Επομένως, οι συνθήκες ακροτάτου της δράσης για την εύρεση της τροχιάς του υλικού σημείου από το A στο B, ταυτίζονται με τις συνθήκες ακροτάτου του μήκους, δηλαδή με αυτές της γεωδαισιακής, που συνδέει τα A και B.

Αρα, η τροχιά ενός ελεύθερου υλικού σημείου από το A στο B του χωρόχρονου Minkowski συμπίπτει με τη γεωδαισιακή, που συνδέει τα σημεία αυτά.

'Οπως θα διαπιστώσουμε, η δήλωση αυτή σύμφωνα με τη γεωμετρική Θεωρία της Βαρύτητας του Einstein ισχύει και για ελεύθερο σώμα, που κινείται μέσα σε τυχόν πεδίο βαρύτητας. Και εκεί, η τροχιά του σώματος από ένα γεγονός A σε άλλο B ταυτίζεται με τη γεωδαισιακή, που συνδέει τα A και B σε καμπύλο χωρόχρονο, η μετρική του οποίου προσδιορίζεται από το δεδομένο πεδίο βαρύτητας.

Οι συναλλοίωτοι Νόμοι της Φυσικής

Γενικεύοντας για τη συμμετρία Lorentz τα σχόλια που κάναμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού σχετικά με τις στροφές στο χώρο και τη μορφή των Νόμων της Φυσικής, το γεγονός ότι οι Νόμοι της Φυσικής (διαφορικές εξισώσεις κίνησης κάθε φυσικού συστήματος, νόμοι διατήρησης) είναι οι ίδιοι ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, συνεπάγεται ότι γράφονται στην τανυστική μορφή

$$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = 0\,, \tag{9.23}$$

όπου $T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}$ οι συνιστώσες τανυστών Lorentz, που σχετίζονται με το φυσικό σύστημα. 'Ενα πολύ απλό παράδειγμα είναι οι εξισώσεις (9.13) κίνησης ελεύθερου σώματος, που μελετήσαμε παραπάνω.

Πράγματι, έστω ότι ως προς κάποιον αδρανειακό παρατηρητή Σ οι συνιστώσες του ικανοποιούν την (9.23). Ο αδρανειακός παρατηρητής Σ', που εξ' ορισμού σχετίζεται με τον Σ με κάποιο μετασχηματισμό Lorentz, θα συμπεραίνει επίσης (με βάση την (8.29)) ότι

$$T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\lambda_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\lambda_2}\ldots\Lambda^{\mu_n}{}_{\lambda_n}\Lambda_{\nu_1}{}^{\rho_1}\Lambda_{\nu_2}{}^{\rho_2}\ldots\Lambda_{\nu_m}{}^{\rho_m}\,T^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m} = 0\,. \tag{9.24}$$

Αρα, ο συγκεκριμμένος Νόμος γράφεται στη γενική μορφή

$$\mathbf{T} = 0\,, \tag{9.25}$$

όπου **T** είναι ο τανυστής με τις παραπάνω συνιστώσες και ισχύει ως προς όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

9.2 Εφαρμογές

Μερικές εφαρμογές θα καταδείξουν την χρησιμότητα του σχετικιστικού φορμαλισμού, τον οποίο αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Το γενικό φαινόμενο Doppler

'Εστω Σ το σύστημα ηρεμίας της πηγής και Σ' παρατηρητής με σχετική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το Σ στη κοινή κατεύθυνση x. Ως προς τον Σ η ταχύτητα της πηγής έχει συνιστώσες $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ και έστω $p^\mu = hf(1, \hat{\mathbf{n}})$ η τετραορμή φωτονίου, που κινείται στη κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$. Αντίστοιχα, ως προς τον Σ' η ταχύτητα της πηγής είναι $u'^\mu = \gamma(V)(1, -(V/c)\hat{\mathbf{x}})$ και η ορμή του φωτονίου $p'^\mu = hf'(1, \hat{\mathbf{n}}')$. Η ποσότητα $p \cdot u$ είναι αναλλοίωτη ως προς μετασχηματισμούς Lorentz. 'Αρα ισχύει

$$p \cdot u = p' \cdot u' \tag{9.26}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ορμές και ταχύτητες παίρνομε

$$f = \gamma(V) f' \left(1 + \frac{V}{c}\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{x}}\right) = f'\gamma(V)\left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta\right)\,, \tag{9.27}$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει κατά τον Σ' ο άξονας x της σχετικής κίνησης πηγής-παρατηρητή Σ' με τη κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου. $\theta = 0(\pi)$ αντιστοιχεί σε απομάκρυνση (πλησίασμα) του Σ' από (προς) την πηγή. $\theta = \pi/2$ αντιστοιχεί στο "εγκάρσιο" φαινόμενο Doppler.

[22] Για χώρους όπως ο Minkowski το μήκος της γεωδαισιακής είναι γενικά ακρότατο.

Σκέδαση σωματιδίων

Ας μελετήσουμε πάλι τη σκέδαση Compton, ώστε να συγκρίνουμε με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε τη πρώτη φορά στο Κεφάλαιο 6.

Φωτόνιο συχνότητας f προσπίπτει σε ακίνητο φορτίο μάζας m και σκεδάζεται σε γωνία θ ως προς την αρχική κατεύθυνση κίνησής του. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος του φωτονίου μετά τη σκέδαση.

'Εστω p_1, p_1' η αρχική και η τελική τετραορμή του φωτονίου, και αντίστοιχα p_2 και p_2' η αρχική και τελική του φορτίου, που αρχικά ήταν ακίνητο στην αρχή των αξόνων.

Από διατήρηση ορμής και ενέργειας έχουμε:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{9.28}$$

Λύνουμε ως προς p_2' ($p_2' = p_1 + p_2 - p_1'$) και παίρνουμε τα τετράγωνα των μέτρων των δύο μελών , οπότε

$$p'^2_2 = p_1^2 + p_2^2 + p'^2_1 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_1' - p_2 \cdot p_1' \, . \tag{9.29}$$

Χρησιμοποιούμε τις τιμές του τετραγώνου της ορμής κάθε σωματίου ($p_1^2 = p'^2_1 = 0,\ p_2^2 = p'^2_2 = m^2c^2$) και παίρνουμε

$$p_1 \cdot p_1' + p_2 \cdot p_1' = p_1 \cdot p_2 \tag{9.30}$$

Ας σημειωθεί ότι η σχέση (9.30) ισχύει *σε κάθε αδρανειακό σύστημα*. Στο σύστημα του εργαστηρίου, που μας ενδιαφέρει εδώ, οι συντεταγμένες των ορμών είναι $p_1^\mu = (hf/c, hf/c, 0, 0),\ p_2^\mu = (mc, 0, 0, 0)$, $p'^\mu_1 = (hf'/c, (hf'/c)\cos\theta, (hf'/c)\sin\theta, 0)$, και $p'^\mu_2 = (E_2', p'^1_2, p'^2_2, 0)$. Συναρτήσει αυτών υπολογίζομε τα εσωτερικά γινόμενα στην (9.30), που γίνεται

$$\frac{h^2 f f'}{c^2}(1 - \cos\theta) = mh(f - f') \, . \tag{9.31}$$

Αντικαθιστώντας τις συχνότητες με μήκη κύματος με βάση τη σχέση $f = c/\lambda$ καταλήγουμε στην γνωστή μας σχέση

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{9.32}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των στροφών στο χώρο είναι υποσύνολο του συνόλου των μετασχηματισμών Poincaré.

2. (α) Από τον ορισμό του πίνακα στροφής R να βρείτε πόσες ανεξάρτητες παραμέτρους έχει μια γενική στροφή στις τρεις διαστάσεις. (β) Το ίδιο για στροφή σε D διαστάσεις. (γ) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό τους, να μετρήσετε πόσες ανεξάρτητες παραμέτρους έχει ένας γενικός μετασχηματισμός Poincaré στον τετραδιάστο χωρόχρονό μας. (δ) Χωρίστε τις παραμέτρους αυτές σε μετατοπίσεις, στροφές και γνήσιους μετασχηματισμούς Lorentz.

3. Χρησιμοποιώντας την τετραορμή σώματος να κατασκευάσετε ένα συμμετρικό ανταλλοίωτο τανυστή δεύτερης τάξης.

4. Αν p^μ και q^μ (μ=0,1,2,3) είναι οι τετραορμές δύο σωμάτων να αποδείξετε ότι οι 16 ποσότητες $T^\mu_\nu \equiv p^\mu q_\nu$ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή δεύτερης τάξης με έναν ανταλλοίωτο και έναν συναλλοίωτο δείκτη.

5. Να εξηγήσετε αναλυτικά γιατί οι τέσσερις ποσότητες p^1, p^2, q^3 και q^0, όπου p^μ και q^μ οι τετραορμές της Ασκησης 4, δεν αποτελούν τις τέσσερις συνιστώσες ενός διανύσματος Lorentz. (Υπόδειξη: Αρκεί για την απόδειξη να περιοριστείτε σε μετασχηματισμούς Lorentz στη κατεύθυνση του άξονα των x.)

6. (α) Να αποδείξετε ότι η δράση

$$S' = \kappa \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right) \sqrt{\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}} d\sigma \tag{9.33}$$

δεν είναι αποδεκτή για ελεύθερο σωμάτιο μάζας $m \neq 0$, ανεξάρτητα απο την τιμή της σταθεράς κ.

(β) Τό ίδιο για τη δράση

$$S'' = \kappa \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} (\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu) \sqrt{\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma}} d\sigma \tag{9.34}$$

(γ) Να γράψετε μια μη αποδεκτή δράση της αρεσκείας σας. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

7. Η αντίδραση $\gamma + p \to \pi^0 + p$.

(α) Αν p_1, p_2, p_3 και p_4 οι τετραορμές των γ, αρχικού πρωτονίου, πιονίου και τελικού πρωτονίου, αντίστοιχα, να δείξετε ότι σε κάθε αδρανειακό σύστημα ισχύει η σχέση:

$$(p_1 + p_2) \cdot p_3 = p_1 \cdot p_2 + \frac{m^2 c^2}{2} \,. \tag{9.35}$$

(β) Να δείξετε, ότι στο σύστημα Κέντρου Μάζας η ενέργεια E_3 του πιονίου δίνεται συναρτήσει της μάζας του m, της ενέργειας E_1 του φωτονίου και της ολικής ενέργειας $\mathcal{E}$ από τον τύπο:

$$E_3 = E_1 + \frac{m^2 c^4}{2\mathcal{E}} \,. \tag{9.36}$$

Βιβλιογραφία

[1] A. Einstein: “On the electrodynamics of moving bodies”, στη συλλογή άρθρων “The principle of Relativity: a collection of original papers on the Special and General Theory of Relativity”, Dover, 1953.

[2] “Subtle is the Lord...”, A. Pais.

[3] “Relativity. The special and the general theory”, A. Einstein. University paperbacks, 1970. Εξαιρετικό εισαγωγικό απλουστευμένο βιβλίο με καθαρή περιγραφή των βασικών εννοιών από τον κύριο δημιουργό της θεωρίας. Οι πρώτες 58 σελίδες του βιβλίου αναφέρονται στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

[4] “The meaning of Relativity”, A. Einstein

[5] C. Kittel, W. Knight και M. Ruderman, “Mechanics”, Berkeley Physics Course Vol. 1. Μεταφρασμένο και στα Ελληνικά.

[6] E. Purcel, “Electricity and Magnetism”, Berkeley Physics Course Vol. 2. Μεταφρασμένο και στα Ελληνικά.

[7] J.S. Bell, “Speakable and unspeakable in quantum mechanics”, Chapter 9, Cambridge University Press, 1993.